Partie 2 : la boîte à outils

premier coffret

Segments : une propriété caractéristique ***Demi-droites opposées*** ***Angles opposés par le sommet***

Symétrie centrale

Angles alternes ou correspondants et droites parallèles

Ces outils, ce sont des propriétés et des mécanismes d'association - on les appelle des « transformations » - qui te serviront tout au long de ta scolarité dans la démonstration de nouvelles propriétés. Au collège, les deux grandes transformations sont la symétrie centrale et la symétrie axiale. Pour pouvoir étudier correctement la première, il me faut d'abord voir avec toi une propriété caractéristique des segments puis observer des angles opposés par le sommet.

(Pour introduire la symétrie axiale, j'aurai besoin d'un théorème que la symétrie centrale me procurera.)

On y va ?

Segments : Une propriété caractéristique - et précieuse !

Mais qu'est-ce qu'une propriété caractéristique ?

Eh, oh, M'sieur, c'est quoi, une propriété, déjà ?

Ah non ! Là, je ne suis pas d'accord ! Relis « qu'est-ce qu'un raisonnement ? »
... ou va regarder dans l'annexe des définitions : définition logique D_{log}-4.
Bon, parce que c'est la première fois :
une propriété est une affirmation dont tu as pu démontrer qu'elle était vraie.

Une « propriété caractéristique » est une propriété qui... caractérise ! ☺
... qui met en évidence un trait de caractère commun à tous les éléments d'une famille d'objets, et uniquement aux éléments de cette famille.

Une propriété caractéristique d'une famille d'objets peut donc servir de définition de rechange pour cette famille. En général, une famille d'objets peut être caractérisée de plusieurs façons : il lui correspond donc plusieurs propriétés caractéristiques. Parmi ces différentes propriétés, on en choisit une comme « définition » de la famille, et on appelle les autres « propriétés caractéristiques ».

(On pourrait les appeler D-*bis*, D-*ter* ... mais on essaie de ne garder qu'une définition par famille - sauf dans les cas où le passage de l'une à l'autre semble simple : par exemple, pour D-32 (boule) et D-36 (disque) j'ai défini les familles de plusieurs façons différentes, mais très proches.)

Quelle propriété caractéristique choisit-on comme définition ?
Là, ça dépend des mathématiciens ! Et parfois, ça pose quelques problèmes d'adaptation entre les textes et les démonstrations de mathématiciens différents... mais on y arrive !

Et maintenant, la précieuse propriété caractéristique des segments
(que je vais classer, comme toutes les propriétés, parmi les théorèmes - et que je vais démontrer !) :

T-8 première version Propriété caractéristique des segments.

Soient A, B et C trois points de l'espace : <u>T-8 *a*</u> Si B appartient à [AC] alors AB + BC = AC.
Et
<u>T-8 *b*</u> Si AB + BC = AC alors B appartient à [AC].

Les mathématiciens étant, tu le sais, très paresseux, ils ont inventé un mot pour rassembler T-8 a et T-8 b en une seule phrase :

T-8 Propriété caractéristique des segments.

Soient A, B et C trois points de l'espace : B appartient à [AC] **équivaut** à AB + BC = AC.

Et voici une démonstration de <u>T-8 *a*</u> :

si B appartient à [AC] alors

d'une part, [AB] et [BC] sont deux lignes limitées ayant une extrémité en commun (le point B) et n'ayant aucun autre point commun que cette extrémité,

d'autre part, [AC] est la ligne formée de l'ensemble des points de [AB] et de [BC],

donc, **d'après M-10** : AB + BC = AC.

… Puis une démonstration de <u>T-8 *b*</u> :

AB + BC est la longueur de la ligne formée de [AB] et [BC].

Si B n'appartenait pas à [AC], cette longueur serait, **d'après M-11**, supérieure à AC :
elle ne pourrait donc pas lui être égale… Donc si elle lui est égale, B <u>doit</u> être un point de [AC] !

En réalité, T-8 ne porte pas sur des longueurs, mais sur des distances. Je devrais l'énoncer :

B appartient à [AC] équivaut à (distance entre A et B) + (distance entre B et C) = distance entre A et C.

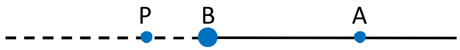
Mais tu te rappelles peut-être (sinon : cinquième voyage, croisière unique, escale-terminus) que : la distance entre deux points est la longueur du segment qui les relie. Alors, comme tu ne disposes pas au collège d'une écriture rapide pour «distance entre A et B », j'écris T-8 avec des longueurs de segments.

(Pour une ligne courbe, si AC signifiait longueur de la ligne entre A et C, et [AC] la partie de la ligne entre A et C, T-8 caractériserait « entre ». Heureusement, [AC] représente exclusivement un segment, et AC la longueur de [AC], donc également une distance !)

<u>Angles opposés par le sommet</u> :

La figure formée par deux angles opposés par le sommet est - tout au moins dans la définition restreinte - très facile à visualiser... et moins facile à définir ! Pour y arriver, je vais commencer par une définition intermédiaire :

D-65 ***<u>Demi-droites opposées</u>*** : deux demi-droites adjacentes d'une même droite.



[BP) et [BA) sont opposées.

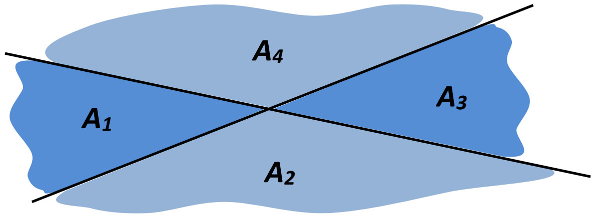
Et voici maintenant une première définition, restreinte à des angles non nuls et strictement inférieurs à l'angle plat, de deux angles opposés par le sommet. Cette définition va me permettre de mettre en évidence une propriété de la symétrie centrale... puis la symétrie centrale, à son tour, me permettra de rédiger une définition générale de deux angles opposés par le sommet (générale parce qu'elle s'appliquera à tous les angles).

D-66 ***<u>Angles opposés par le sommet</u>*** (définition restreinte) :

deux angles, strictement compris entre l'angle nul et l'angle plat,
tels que chaque côté de l'un des angles soit opposé à un côté de l'autre angle.

A_1 et A_3 sont opposés par le sommet,

A_2 et A_4 le sont également.



Mais M'sieur,
vous avez dit qu'un angle,
c'était une surface...
« compris entre », c'est pas
pour des nombres ?

Bon, d'accord... tu marques un point ! J'aurais dû écrire : « dont l'écart angulaire est strictement compris entre celui d'un angle nul et celui d'un angle plat »... j'ai fait un « abus de langage ». C'est parfois acceptable : lorsque tout le monde comprend, comme toi, qu'il s'agit d'un abus de langage, pour alléger une expression. Mais il ne faut pas en ... abuser. ☺

Deux remarques rapides, et puis un théorème - très simple, mais bien utile. Tu t'en rendras bientôt compte !

Première remarque : puisque deux demi-droites opposées ont la même origine,
deux angles opposés par le sommet ont le même sommet.

Deuxième remarque : puisque deux droites sécantes définissent un plan unique,
deux angles opposés par le sommet sont coplanaires.

Et le théorème promis :

T-9 Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure

Démonstration, pour les angles $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_3}$ du dessin précédent :

d'après M-3, $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_4}$ sont coplanaires
d'après D-45 ils sont adjacents et **d'après D-57** ils sont supplémentaires.
Mais $\boldsymbol{A_3}$ et $\boldsymbol{A_4}$ le sont également, donc $\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_3}$ … et c'est fini ☺

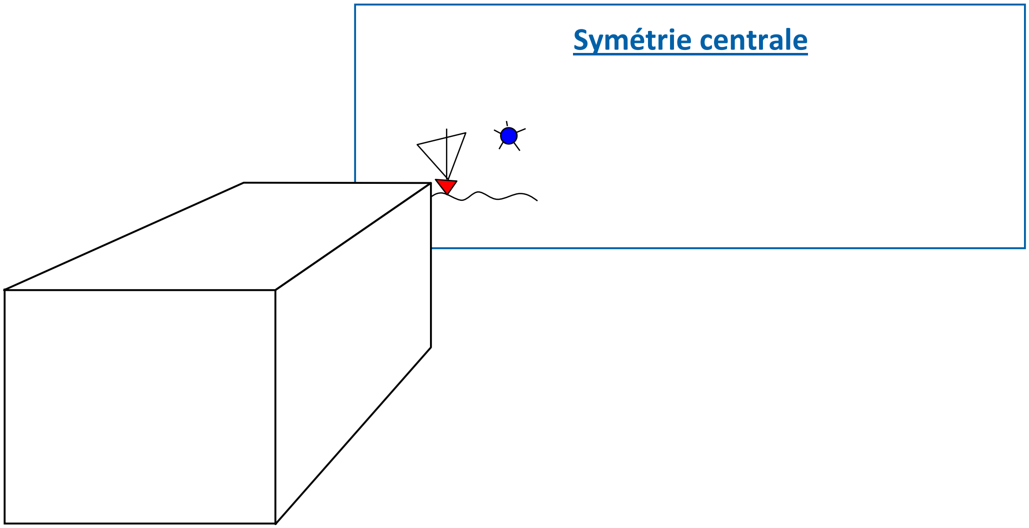
(Tu as bien sûr remarqué qu'avant « donc », je parle des angles... et qu'après, je parle de leurs mesures !)

Eh, pas d'accord ! Comment ça, c'est fini ??? Je ne comprends pas !

Pas de panique ☺ … j'ai peut-être été un peu rapide.
Appelle a_1 l'écart angulaire de $\boldsymbol{A_1}$, en degrés,
a_3 celui de $\boldsymbol{A_3}$ et a_4 celui de $\boldsymbol{A_4}$:
$\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_4}$ sont supplémentaires donc $a_1 + a_4 = 180$
A3 et ***A4*** sont supplémentaires donc $a_3 + a_4 = 180$
Mais alors :

$$a_1 + a_4 = a_3 + a_4$$
$$a_1 + a_4 - a_4 = a_3 + a_4 - a_4$$
$$a_1 = a_3$$

Et voilà ! Maintenant, tu as les connaissances nécessaires pour aborder la...



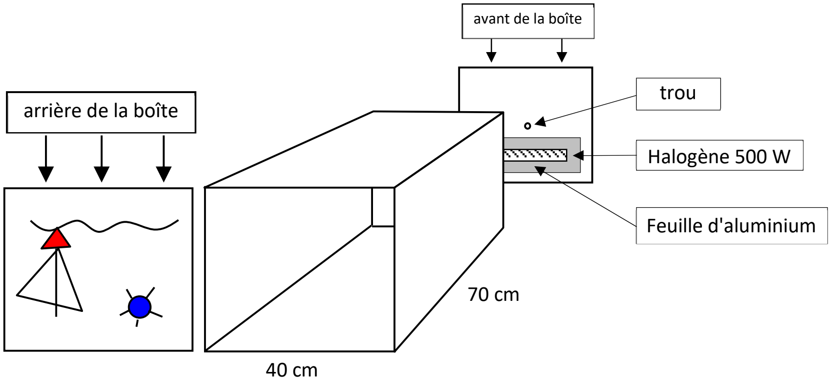
Une histoire vraie :

Il y a quelques années, j'ai construit une « boîte magique » pour introduire la symétrie centrale, en cinquième... construit, pas inventé : ce n'est qu'une application de la « *camera obscura* » de Léonard de Vinci - et même, bien avant lui, de Ibn Haitham (Wikipedia ?)

Maintenant, je ne pourrais plus m'en passer !
Elle est en bois, et les panneaux avant et arrière se démontent.

Au début, je m'en sers pour projeter un dessin sur le tableau de la classe, et je repasse ce dessin au feutre.
La face avant de la boîte est à 70 cm du tableau - mais si, c'est important, tu verras !

Ensuite, je la démonte.
Démontée, elle ressemble à peu près à ceci :



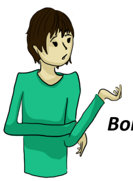
Et là, si tu étais en classe avec mes élèves, tu constaterais comme eux que les 2 dessins, celui du fond de la boîte et celui du tableau, ont apparemment la même taille et la même forme…

Mais ils sont « inversés » :
par exemple, le soleil est en bas à gauche sur le dessin de la boîte, et en haut à droite sur le tableau.
(Il t'apparaît en bas *à droite* sur le dessin parce que j'ai ouvert le panneau arrière !)

Tu constaterais également qu'à part une feuille d'aluminium, une lampe halogène et le dessin, la boîte est vide : pas de miroir, pas de lentilles, **rien** !

Euh… la feuille d'alu, C'est pas un miroir ???

Pas vraiment, non : bien sûr, elle réfléchit la lumière de la lampe halogène.
Mais je ne l'ai placée là que pour protéger le panneau en bois.



Bon, d'accord… mais comment vous avez fait, alors ? Et … pourquoi vous le faîtes ? C'est des maths, ça ?

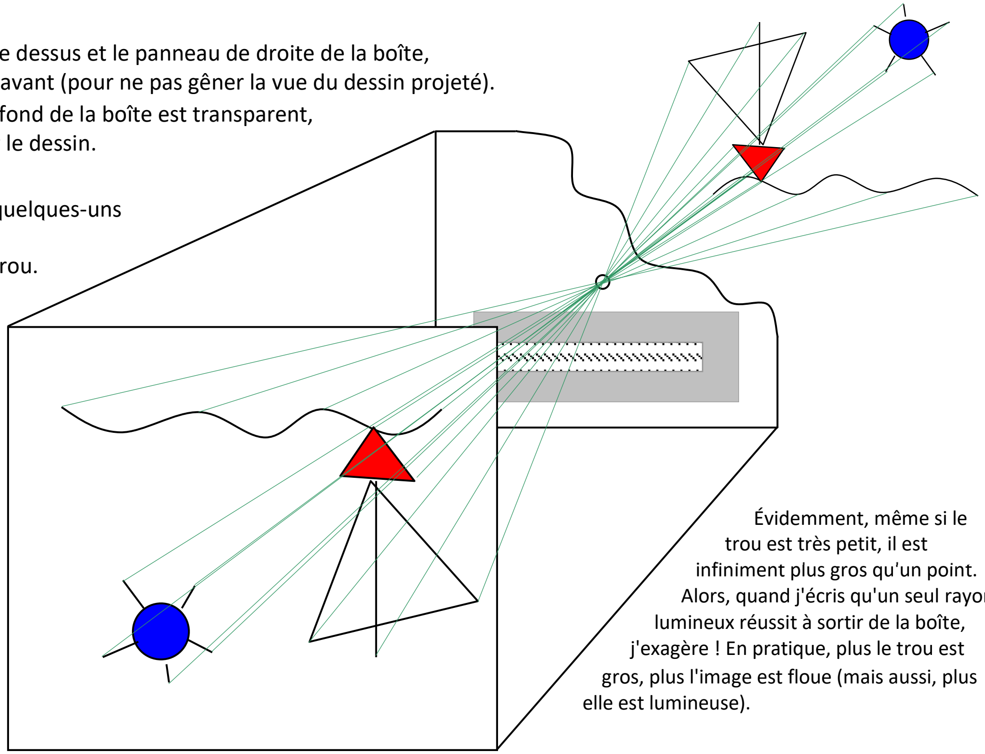
Ne t'inquiète pas, je vais te répondre. Dans l'ordre !

D'abord, **comment l'image est-elle apparue ?** Que s'est-il passé ?

La lampe halogène et la feuille d'aluminium ont constitué un projecteur, qui a violemment éclairé le dessin du fond, qui a, à son tour, renvoyé la lumière : chaque "point d'encre" du dessin est devenu une lampe qui éclairait tout autour d'elle. Une sorte d'objet ponctuel brillant. Mais, de tous les rayons lumineux émis par chaque point d'encre, un seul réussissait à sortir de la boîte, par le trou. Tous les autres rayons se cognaient aux parois et s'affaiblissaient petit à petit, puis disparaissaient. Et comme un dessin remplace parfois un long discours, regarde, et tu comprendras mieux pourquoi les 2 dessins sont inversés :

J'ai enlevé le panneau de dessus et le panneau de droite de la boîte,
et j'ai un peu découpé l'avant (pour ne pas gêner la vue du dessin projeté).
Tu dois imaginer que le fond de la boîte est transparent,
ce qui te permet de voir le dessin.

Je n'ai représenté que quelques-uns
des rayons lumineux
qui s'échappent par le trou.



Pourquoi les 2 dessins ont-ils la même taille ?

Parce qu'il y a la même distance entre le fond de la boîte et le trou qu'entre le trou et le tableau !

Si j'avais rapproché la boîte du tableau, le dessin projeté aurait été plus petit.

Si je l'avais éloignée, il aurait été plus grand…

Évidemment, même si le trou est très petit, il est infiniment plus gros qu'un point. Alors, quand j'écris qu'un seul rayon lumineux réussit à sortir de la boîte, j'exagère ! En pratique, plus le trou est gros, plus l'image est floue (mais aussi, plus elle est lumineuse).

Ensuite, **pourquoi cette expérience ?**

D'abord, parce qu'elle met en... lumière le fonctionnement de nombreux appareils d'optique : les appareils photo, les caméras, les projecteurs. Et même l'œil !
Mais tu as raison, tout ça, c'est de la physique, pas des maths !

Seulement voilà : notre géométrie s'inspire de l'univers dans lequel nous vivons.
Alors les mathématiciens ont inventé une machine à associer des images (à des figures géométriques) qui fonctionne exactement comme ma « boîte magique ». Ils l'ont appelée : symétrie centrale.