

Partie 1 : la base de la base

Sept voyages au cœur des premiers mots de la géométrie

Pour un mathématicien, la géométrie repose sur 3 éléments de base : point, droite et plan.

« De base » veut dire qu'on ne les définit pas, on se contente de leur imposer des comportements.

Si je ne peux pas les définir, je peux t'aider à les concevoir : plus ta vision d'un point, d'une droite ou d'un plan sera claire, plus la géométrie te paraîtra simple. Bien souvent, lorsque tu ne raisonnes pas juste, c'est parce que tu ne vois pas juste. Heureusement, ta vision s'éduque avec ton expérience, avec tes connaissances !

D'où l'idée de ces sept voyages… Mais les voyages, ça se prépare, alors :

Avant le(s) départ(s) : Qu'est-ce qu'un raisonnement ?

Raisonner, c'est enchaîner - en respectant un jeu de « lois logiques » - des certitudes élémentaires.

Une certitude élémentaire ressemble fréquemment à :

« je suis dans telle situation, donc j'ai telle conséquence »,

ou, plus généralement : « telle situation engendre telle conséquence ».

(Fréquemment seulement, mais ça suffira pour un début !)

Naturellement, ta certitude élémentaire n'est utilisable que :

si tu es bien dans la situation dans laquelle tu crois être,

et si tu es effectivement certain(e) de ce que tu affirmes !

« J'ai couru trop longtemps donc je suis fatigué »,

« si le Soleil s'éteint, alors la Terre deviendra glaciale (rassure-toi, ce n'est pas pour tout de suite !) »,

« si je lis tout ce livre, alors... non, rien, tu verras bien ! » ☺

Comme une grande partie de ce livre manipule des raisonnements, prends le temps, maintenant, de jeter un coup d'œil à quelques mots incontournables, au cœur de la logique mathématique.

Comme je le ferai bientôt pour les définitions géométriques, je vais donner un numéro à chacune de ces définitions logiques, et ces numéros - précédés des lettres «**D**$_{log}$» te permettront de les identifier, si nécessaire, tout au long de ce livre. Ce seront leurs noms.

Des mots qui reviendront souvent :

Dlog -1 ***Affirmation*** : toute phrase qui n'est ni une question, ni un ordre.
Une affirmation peut être vraie ou fausse !

Dlog -2 ***Prouver*** **ou** ***démontrer*** : en partant d'une situation, enchaîner des certitudes bien choisies pour arriver à la conséquence que l'on voulait atteindre.

Dlog -3 ***Axiome*** : une affirmation dont personne ne peut démontrer ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse.
La notion d'axiome est quelque chose de fantastique :
les axiomes sont à l'origine de tous les raisonnements.

Dlog -4 ***Propriété*** : une affirmation dont on a démontré qu'elle était vraie.

Dlog -5 ***Théorème*** : une propriété qui paraît suffisamment intéressante pour mériter ce nom.

Comment démontres-tu une propriété ?

En enchaînant des certitudes… Mais que sont ces certitudes mathématiques que tu peux enchaîner ?
D'après Dlog-4, des propriétés que tu as déjà démontrées ! Et ces propriétés-là, comment les as-tu démontrées ?
En t'appuyant sur d'autres propriétés, démontrées avant celles-là !

On reprend ? Pour démontrer une propriété, tu utilises des propriétés démontrées plus tôt, qui, elles-mêmes, utilisent des propriétés démontrées encore plus tôt, qui, à leur tour... quand est-ce que ça s'arrête ? Où sont les premières propriétés, les premiers maillons des chaînes de raisonnement ?

Si tu y réfléchis, tu te rends rapidement compte qu'un premier maillon ne peut pas être une propriété : une propriété doit être démontrée, et pour la démontrer, tu utilises d'autres propriétés.

Un premier maillon doit donc être une affirmation non démontrable : si tu pouvais démontrer que cette affirmation est fausse, elle n'aurait pas beaucoup d'intérêt... et si tu pouvais démontrer qu'elle est vraie, ce serait une propriété, qui s'appuierait sur d'autres propriétés - des maillons antérieurs !

Ce sont ces affirmations non démontrables, ces premiers maillons que les mathématiciens appellent des « axiomes » - rien qu'en géométrie, il y en a une vingtaine.
Et je vois bien que tu veux un exemple. D'accord, c'est parti !

Un axiome :

Si A et B sont deux points distincts, alors il existe une droite unique qui passe par A et B.

Les mathématiciens notent cette droite (AB)… Et je simplifie un peu, parce qu'en réalité, il s'agit de deux axiomes différents : le premier décide qu'il existe une droite qui passe par A et B, et le deuxième que cette droite est unique.

Évident, non ? … Mais personne ne peut le démontrer !

Euh…
Vous êtes sérieux, là ? …
Ça se voit, non ???

J'étais sûr que tu dirais ça !
Ça ne se voit pas du tout
(d'ailleurs, personne ne peut voir une droite).
Ça te paraît évident parce que...
Bon, la vérité,
c'est qu'on t'a conditionnée à le trouver évident !

Un autre axiome :

Si A , B et C sont trois points distincts,
alors il existe une droite unique qui passe par A et qui est parallèle à (BC).

Des mathématiciens très sérieux se sont « amusés » à voir ce qui se passait si on décidait qu'aucune droite parallèle à (BC) ne passait par A... ou, si on décidait au contraire que plusieurs droites distinctes et parallèles à (BC) passaient par A !

Et ils ont découvert que ça ne les empêchait pas du tout de construire des géométries tout à fait logiques et rigoureuses - aussi logiques et rigoureuses que celle que tu étudies et qu'on appelle la « géométrie d'Euclide ». Simplement, elles correspondent à des visions différentes de l'univers - des visions qui ne correspondent pas à notre monde familier (mais pas parce qu'elles sont fausses : j'imagine que l'une de ces géométries correspondrait à la vision qu'aurait un électron de notre univers, s'il avait des yeux).

Axiomes et métaxiomes :

Il existe plusieurs « jeux d'axiomes » qui permettent de construire la géométrie que tu utilises. À ma connaissance, le plus ancien est celui proposé par Euclide - il y a environ 2300 ans.
Et tu ferais bien d'aller jeter un coup d'œil à sa biographie, sur Wikipedia, par exemple. Ta géométrie ne s'appelle pas « géométrie euclidienne » par hasard…

Mais le « jeu d'axiomes » sur lequel je m'appuie est un peu plus récent : c'est celui de Hilbert, et il n'a qu'une centaine d'années. Un jeunot ! (Et là encore, Wikipédia … ☺)

Que ce soit pour la construction des nombres, ou pour la géométrie, ou encore pour la logique que tu utilises, je remonterai fréquemment aux axiomes eux-mêmes... mais pas toujours : ils sont à l'origine de tous les raisonnements mathématiques, mais tu n'as pas encore la culture ou la réflexion nécessaire pour comprendre leur utilité (non, ce n'est pas une critique - patience, un jour, tu en sauras plus que moi).

J'ai donc décidé de m'appuyer sur un jeu personnel d'affirmations, dont certaines sont de vrais axiomes mais dont d'autres sont démontrables (à partir de « vrais » axiomes) - et qui, toutes, devraient te paraître évidentes.

Je les appelle des « métaxiomes ». Le tout premier est un métaxiome physique : il fera son entrée en scène dans quelques pages, et il me semble tellement antérieur aux autres que je lui ai attribué le numéro « 0 » - et il lui correspondra d'ailleurs, dans quelques temps, une « D_{phy}-0 » (habituellement, je numérote à partir de « 1 ») !

(Tu trouveras dans les annexes le jeu complet des métaxiomes... et sur le *site du livre* , rubrique « *compléments* » le jeu des axiomes d'Euclide et celui des axiomes de Hilbert - juste pour le plaisir !)

Premier voyage

en 3 croisières et quelques escales

Objet ***Endroit*** ***Objet ponctuel*** ***Point*** ***Ensemble*** ***Élément*** ***Paire*** ***Autant*** ***Ligne*** ***Trait***

Pour te préparer à ce voyage, voici une devinette. Elle porte sur des segments de droite et - juste le temps de cette devinette - je vais faire comme si tu savais vraiment ce qu'est un segment. D'ailleurs, tu le sais peut-être... mais si, pour toi, un segment est simplement un « trait droit », alors le « bon sens » te soufflera une réponse fausse. Parce que le «bon sens» a besoin de connaissances exactes pour être vraiment bon : après tout, pendant très longtemps, le «bon sens» a dit que le soleil tournait autour de la Terre.

Allez, c'est parti ! Non, attends encore un peu. Cette devinette, je voudrais pouvoir l'écrire - et la dessiner - proprement. Alors, voici un (bref) rappel des codes de vocabulaire et de dessin que je vais utiliser ici... et que tu connais sûrement déjà !

La géométrie a sa langue. On dirait du français… Mais ça n'en est pas !

Si A est le nom que j'ai donné à un point, A se lit « point A »… Ou « point grand A ».

En maths, « grand » veut souvent dire « majuscule » (et « petit » veut dire minuscule) :
même si ce n'est pas du tout une obligation, les points ont très souvent comme noms des lettres majuscules.

(AB) se lit « droite A B »... et ne définit une droite que si $A \neq B$.

[AB] se lit « segment A B ».
Si $A \neq B$, c'est une partie de (AB), composée de A, de B et des points de (AB) situés entre A et B.
Et si $A = B$, tu peux encore te dire que c'est une partie d'une droite... une partie qui ne contient qu'un point ☺.

La géométrie a ses codes. On dirait du dessin… Mais ça n'en est pas !

Quand tu veux représenter un point, tu traces
(en général, mais ce n'est pas une obligation)
2 traits qui se croisent en ce point.

Le point M

Il m'arrivera aussi de représenter un point par une tache, plus ou moins grosse,
selon l'importance que je donne à ce point
(mais tu verras bientôt qu'un point n'a pas de grosseur).

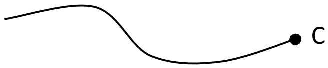
Quand tu veux représenter une ligne,
tu traces un trait. Comme ceci :

Si tu veux indiquer que cette ligne est illimitée (ne « s'arrête pas »), tu dois arrêter ton trait « dans le vide », c'est-à-dire que tu ne dois pas l'arrêter contre un autre trait ou contre un point : la ligne que j'ai représentée juste avant est donc illimitée… Mais je ne sais pas comment elle continue !

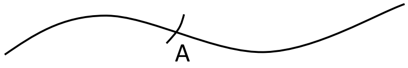
Si tu veux indiquer que la ligne est limitée par un point (s'arrête en un point), ton trait doit s'arrêter contre un autre trait, qui passe par ce point - ou contre un « point-tache » :

Cette ligne « s'arrête en B » :
ou : B est une extrémité de cette ligne …

… Et celle-ci en C :



Cette ligne passe par le point A,
mais elle ne s'y arrête pas :



Ici, tu dessines une (ligne) droite :

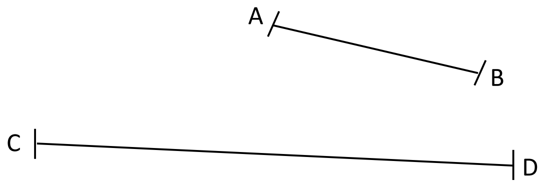
Ici, une demi-droite :

Et là, un segment (de droite) :

Mais qu'est-ce qu'un point, une ligne, une droite, une demi-droite, un segment ? Qu'est-ce qu'un trait ? Patience, je t'en reparlerai… Après la devinette ☺.

Bon, maintenant, je peux commencer ! Tu es prêt ?

Regarde ces deux segments, là… [AB] et [CD] :



Question : lequel a le plus de points ?

Réponse : ils ont autant de points tous les deux !

Mais ne pense pas « c'est évident, parce qu'ils ont une infinité de points »,
ce n'est **<u>pas</u>** la bonne raison : il n'y a pas autant de nombres dans l'ensemble des nombres entiers que de points dans un segment… et pourtant, l'ensemble des nombres entiers contient une infinité de nombres.

Derrière cette question - et sa réponse - se cachent un tas de concepts fondamentaux pour que la géométrie te devienne simple. Et pas seulement la géométrie ! Mais ne cherche pas, ces concepts ne sont pas « au programme ». Et pourtant, je ne sais vraiment pas comment je pourrais te guider à travers les maths sans commencer par t'en parler un peu !

En vrac, quelques-uns de ces concepts fondamentaux :

qu'est-ce qu'un segment ?

... ce qui t'amène immédiatement à la question : qu'est-ce qu'une droite ?

... et plus généralement, à : qu'est-ce qu'une ligne ?

... et finalement, à la question de fond : **qu'est-ce qu'un point ?**

Que signifie « autant » ?

Le point est à la base de tout ce que tu apprends en géométrie, alors ce serait bien que tu aies une idée plutôt précise de ce que c'est !

Et « autant » est à la base de tout ce que tu apprends sur les nombres, alors...

Eh, oh, Monsieur…
Et la différence
entre une ligne et un trait, alors ?

Ooops, j'avais oublié, c'est vrai.
Bon, je t'en parlerai aussi ☺ !

Et quand on aura parlé de tout ça, tous les deux, tu sauras vraiment pourquoi les deux segments ont autant de points (et tu pourras frimer... mais ce n'est pas le but) !

Bon, je t'offre 2 croisières inoubliables… Et même une $3^{\text{ème}}$ croisière bonus !
Tu embarques ?

<u>Première croisière</u> : le point.

<u>Première escale</u> : qu'est-ce qu'**un objet physique ?**

Tout ce qui se déplace, ou peut-être déplacé.

Un objet occupe un endroit. Lorsqu'il se déplace, il libère l'endroit qu'il occupait, il occupe un nouvel endroit, il le libère, il en occupe un autre... pour un physicien, nous sommes, toi et moi, des objets.

Ceci est une définition *physique* de l'objet : pour un biologiste, un être vivant n'est pas un objet, alors que pour un mathématicien ensembliste, même les pensées, les rêves, les nombres ou les dates de naissance sont des objets (et les éléments d'ensembles, qui sont eux-mêmes des objets...)

Une façon efficace de te représenter un objet *physique* : imagine-lui une couleur - un radiateur rouge, un avion bleu, un bonhomme vert...

Deuxième escale **:** qu'est-ce qu'**un endroit ?**

Un emplacement, souvent repéré par un objet qui l'occupe, ou qui l'entoure, ou qui le montre : une main, un doigt, une flèche...

Tu ne peux ni saisir, ni déplacer un endroit. Tout juste le traverser, l'occuper ou le libérer, ou, naturellement, l'ignorer !

Toute notre géométrie étudie des endroits dont les positions ou les formes sont particulières : des points, des lignes, des surfaces, des « solides » (les points occupés par des objets ☺).

L'univers est un immense endroit : à chaque instant, la Terre - qui est un objet - occupe un endroit de cet univers.

Ta maison occupe un endroit sur cette Terre. Les murs, le plafond, le sol de ta chambre entourent un endroit déjà plus petit. Et toi-même, tu occupes un endroit, que tu libères lorsque tu te déplaces, pour en occuper un autre. Et tous ces endroits n'arrêtent pas de changer : la Terre tourne sur elle-même, tourne autour du Soleil, qui lui-même s'éloigne du centre de la Voie lactée, qui, pendant ce temps-là, s'éloigne des autres galaxies... et ta maison, accrochée à la Terre, change constamment d'endroit.

Seul, un endroit n'est pas visible. Il est là, c'est tout ! Tu n'y prêtes attention que s'il est occupé, traversé ou entouré par un objet qui t'intéresse... ou s'il s'agit d'une forme géométrique décrite dans un exercice que tu dois absolument rendre cet après-midi.

La notion d'endroit précède celle d'objet : tu peux imaginer un endroit vide, mais essaie d'imaginer un objet qui ne serait nulle part !

Troisième escale **:** qu'est-ce qu'**un objet ponctuel ?**

Un objet imaginaire, qui va t'aider à entrer dans le monde de la géométrie.

Excusez-moi…
Vous avez bien dit
« imaginaire » ?

Et ça peut m'aider, ça ???

Bien sûr, que ça peut t'aider !
« Faire de la géométrie », c'est plonger dans l'imaginaire. Jongler avec des endroits infiniment petits, ou infiniment minces, ou sans épaisseur... tous tes dessins, même s'ils te paraissent très précis, ne sont qu'une représentation extrêmement grossière, extrêmement imparfaite de points, de lignes... il ne sont là que pour t'aider à mieux les imaginer.

Je continue ?

Signe caractéristique : il est « plus petit que petit ». Mais qu'est-ce que ça veut dire ?

Choisis un objet, n'importe quel objet. Par exemple un Airbus modèle réduit, télécommandé.
Imagine (eh oui) que tu aies le pouvoir de le faire rétrécir 10 fois, cent fois, ..., un million de fois...

Avec un microscope suffisamment puissant, tu peux tout de même retrouver sa forme, voir ses ailes, ses réacteurs. Ce n'est pas un objet ponctuel. Imagine que tu continues à le faire rétrécir, encore... et encore. Jusqu'à ce que, malgré tes efforts, il ne puisse plus rétrécir davantage !

Avec un microscope vraiment très puissant, tu vas pouvoir, une dernière fois, retrouver sa forme, ses ailes... ce n'est toujours pas un objet ponctuel. Patience.

Mais tu t'entêtes, tu t'acharnes à le faire rétrécir une fois de plus, une fois de trop, et l'Airbus implose : il rentre en lui-même. Et là, il perd sa forme ! Aucun microscope, même surpuissant, ne te permettra plus jamais de voir que c'était un Airbus... c'est devenu un objet « plus petit que petit », un objet qui a dépassé les possibilités de réduction de notre univers réel.

Maintenant, tu as ton objet ponctuel ! Et tout ce que tu en vois, c'est un éclat de lumière (ses phares étaient allumés) : mais, avant d'imploser, ç'aurait aussi bien pu être un phare côtier, ou une lampe de poche... (Les physiciens, eux, parlent de « masse ponctuelle ». Rien ne t'empêche d'imaginer que l'Airbus a rétréci en conservant la même masse, en pesant toujours le même poids).

Escale-terminus **:** qu'est-ce qu'**un point ?**

Tu ne devines pas ? Un endroit « plus petit que petit ». Seul un objet ponctuel pourrait l'occuper sans en déborder… Mais ne va pas imaginer que tous les points doivent être occupés par des objets ponctuels !

En revanche, il serait raisonnable d'imaginer qu'un objet ponctuel occupe toujours un point. Raisonnable, sans plus : après tout, un objet ponctuel est imaginaire, alors pourquoi ne pas imaginer qu'il puisse se trouver « ailleurs » que dans un point…

« Ailleurs » **où** ?

Et là, ça devient vite trop compliqué ! D'où l'entrée en scène de M_{phy}-0, le métaxiome physique que je t'avais annoncé (la première règle de notre jeu de construction), qui va nous permettre de respirer :

M_{phy}-0 Un objet ponctuel qui se déplace occupe constamment un point.

Ça n'a peut-être l'air de rien, comme ça. Mais tous les raisonnements géométriques s'appuient sur cette propriété de l'objet ponctuel et du point. Et je m'en servirai, bien sûr, pour te prouver que les segments [AB] et [CD] ont réellement autant de points… Dès que j'aurai défini « autant » ☺.

Pour commencer notre géométrie, je devais inventer ou l'objet ponctuel, ou le point... l'autre suit assez simplement. J'ai choisi d'inventer l'objet ponctuel, parce qu'il me semble plus facile d'imaginer la réduction d'un objet que celle d'un endroit. Mais tu as le droit de ne pas être d'accord !

Deuxième croisière : « autant ».

Première escale : qu'est-ce qu'**un ensemble ?**

Suppose que tu penses à la fois à cette page que tu lis, à ta dernière note en maths, et à ton pire ennemi. Tu penses à trois objets - au sens mathématique du mot « objet », et ta pensée est peut-être le seul lien entre eux. Cette pensée est une bonne représentation d'un ensemble. Ce n'est qu'une image, mais elle n'est pas mauvaise : un ensemble est comme une pensée à propos d'objets. Tu peux t'intéresser à des ensembles farfelus, en y rassemblant, comme je l'ai fait, des objets qui n'ont pas grand-chose de commun... ou tu peux observer des ensembles dont les objets sont tous du même type : par exemple, des ensembles de points, comme les segments de droite (tu vois, on y arrive ☺). Si A et B sont 2 points, ce que tu appelles « segment A-B » (et que tu écris [AB]) est un ensemble, dont les objets sont A, B et les points de (AB) situés entre A et B … S'il y en a, c'est-à-dire lorsque $A \neq B$!

(Mais... euh... ça veut dire quoi, « entre » ?
Patience, patience ☺)

Deuxième escale : qu'est-ce qu'**un élément ?**

« Élément », en fait, est une abréviation de « élément d'un ensemble ». Et les éléments d'un ensemble sont... les objets qui y sont rassemblés. Tout simplement ! Par exemple, A est un élément de [AB]. B aussi, bien sûr. Comme n'importe quel autre point du segment. Pourquoi avoir inventé ce nouveau mot, alors que le mot « objet » existe déjà ? Pour permettre de séparer tous les objets de l'univers en deux catégories : ceux qui « appartiennent » à l'ensemble qui t'intéresse, les « éléments » de cet ensemble... et les autres !

Mini-escale : qu'est-ce qu'**une paire ?**

Un ensemble qui a exactement deux éléments.

Escale-terminus : que signifie « **autant** » **?**

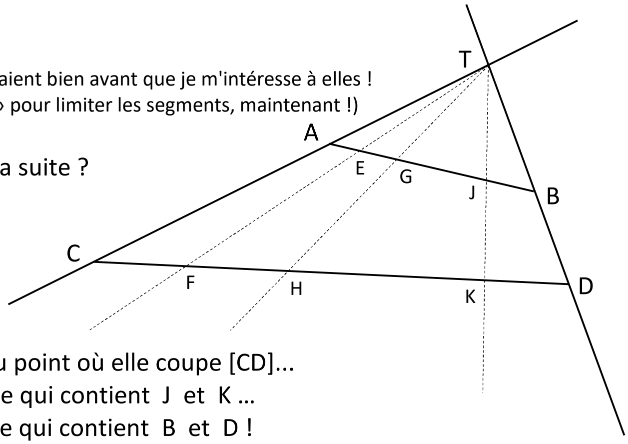
En maths, ce mot n'a de sens qu'entre deux ensembles.

« Deux ensembles ont autant d'éléments » veut dire qu'il est possible de composer des paires avec **TOUS** les éléments des deux ensembles - en associant à chaque fois un élément du premier ensemble et un élément du deuxième ensemble, sans jamais prendre deux fois le même !
Imagine un ensemble de personnes et un ensemble de chaises : il y a autant de personnes que de chaises si tu peux composer des paires « personne et chaise » - par exemple en asseyant chaque personne sur une chaise ☺ - avec toutes les personnes et avec toutes les chaises, sans tricher (pas de personnes en trop, pas de chaises en trop, pas plusieurs personnes sur la même chaise, pas plusieurs chaises sous la même personne) !

Après ces deux croisières, je peux presque te prouver que [AB] et [CD] ont autant de points. Pourquoi « presque » ? Parce que cette preuve repose sur la notion de droite, sur les propriétés des droites... et ça, nous ne les verrons que plus tard. Mais comme je sens que tu craques, je vais faire comme si tu savais déjà tout sur les droites. Seulement, tu n'y couperas pas : cela n'aura vraiment de sens pour toi que si tu lis les pages suivantes !

Regarde : je « trace deux droites », (CA) et (DB).

(ça veut dire que je les mets en évidence. Mais elles existaient bien avant que je m'intéresse à elles ! Et tu as remarqué : je n'ai plus besoin des « petits traits » pour limiter les segments, maintenant !)



J'appelle T le point commun à ces deux droites. Tu devines la suite ?

Imagine toutes les demi-droites qui « partent » de T et qui traversent [AB]... ou [CD], ce sont les mêmes !

Pour chacune de ces demi-droites,
imagine la paire composée du point où elle coupe [AB] et du point où elle coupe [CD]...
La paire qui contient E et F, celle qui contient G et H, celle qui contient J et K ...
Et bien sûr, n'oublie pas la paire qui contient A et C, ni celle qui contient B et D !

Avec ce système, tu associes bien chaque point du premier segment à chaque point du deuxième. Sans en laisser aucun de côté, sans prendre deux fois le même.

Donc (roulements de tambour)... [AB] et [CD] ont autant de points.

En fait,
ça marche parce que
les points de [CD]
sont plus gros
que ceux de [AB],
c'est ça ?

si [CD] est
2 fois plus long
que [AB],
ses points
sont 2 fois plus gros ?

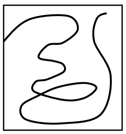
PAS DU TOUT !
Désolé, mais tu as tout faux.

Ce qui rend les points extraordinaires,
c'est justement qu'il n'existe PAS de gros points !!!
Personne ne peut faire grossir un point.
Même avec un super-méga-hyper microscope !
Exactement comme aucun télescope optique
n'est capable de faire grossir une étoile lointaine
(les étoiles ne sont pas « plus petites que petites », bien sûr. Elles sont « plus loin que loin » ☺)

Je crois que je dois VRAIMENT te parler de la différence entre ligne et trait !
Allez, on y va !

<u>Croisière bonus</u> : du point à la ligne, de la ligne au trait.

<u>Première escale</u> : qu'est-ce qu'**une ligne ?**



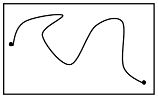
Tu te rappelles l'Airbus modèle réduit qui a implosé, qui est devenu un objet ponctuel ?
Imagine (encore !) que cet « avion-ponctuel » fait des acrobaties dans le ciel. Imagine que, dans chaque point qu'il traverse, il laisse une trace de fumée blanche - une trace pas plus grosse qu'un point !

Alors tu verras un fil de fumée, un fil qu'aucun microscope ne pourrait épaissir, un fil "plus fin que fin". **Ce fil occupe une ligne**.

Une ligne est un ensemble de points, donc un endroit : tu ne peux ni la saisir, ni la déplacer. Juste l'occuper ou la traverser.

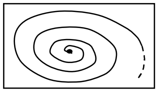
La famille des lignes est une des grandes familles de classification des figures géométriques :
les 3 autres grandes familles sont celles des points, des surfaces et des solides (qui ne sont pas des objets !)
…Tout comme en zoologie tu connais certainement la classe des oiseaux, celle des reptiles, celle des mammifères…

Lignes limitées, lignes illimitées ?



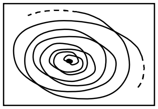
Tu peux facilement concevoir **une ligne limitée**.
C'est un trajet (mais pas nécessairement en ligne droite !) d'un objet ponctuel entre 2 points - ou d'un objet ponctuel qui revient à son point de départ (la ligne est alors « fermée »).

Un segment de droite, un arc de cercle, un polygone, un cercle,
ou encore un trajet formé de 3 segments suivis de 2 arcs de cercles…



Une ligne illimitée est plus difficile à concevoir :
il te faut imaginer un objet ponctuel qui part pour ne plus jamais s'arrêter. Pas même dans 5 milliards d'années, lorsque notre soleil aura cessé de briller !

Une demi-droite ou une spirale simple sont des lignes illimitées.



Si tu peux imaginer 2 objets ponctuels qui partent successivement du même point, mais dans 2 sens différents, et qui ne s'arrêteront jamais, tu peux concevoir une ligne illimitée dans les 2 sens.

Par exemple une droite, bien sûr, mais aussi une spirale double, et beaucoup d'autres lignes.

Reconnais que ça demande un effort !

Une ligne n'est jamais finie !

Ne confonds pas limitée et finie :

limitée veut dire que la ligne a deux limites (deux points qui l'arrêtent)… Ou qu'elle est fermée !

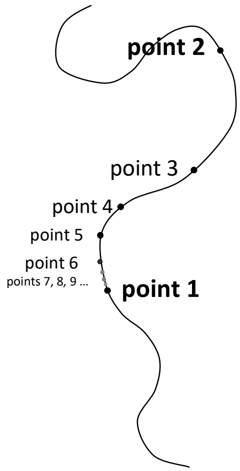
finie signifierait que tu peux en compter les éléments (c'est-à-dire les points qui la composent) … Et ça, ce n'est pas possible : même une ligne limitée est composée d'une infinité de points !

Même une toute petite ligne ? Toute toute petite ?

Même une toute toute toute petite !
Regarde :

Choisis 2 points d'une ligne. 2 points différents… Donc 2 points séparés.

(S'ils n'étaient pas séparés, cela voudrait dire qu'aucun microscope, même hyper-puissant, ne permettrait de les distinguer : tu aurais simplement choisi 2 fois le même point.)



Existe-t-il au moins <u>un autre point</u> de cette ligne, entre les 2 points que tu as choisis ?

Oui, sinon, comment un objet ponctuel passerait-il du 1er point au 2ème ?

Bon. Tu avais choisi "point 1" et "point 2", et te voici maintenant avec "point 3",entre "point 1" et "point 2"…

Et maintenant :

Existe-t-il au moins <u>un autre point</u> de la ligne, entre "point 1" et "point 3" ?

Je suppose que tu devines la suite?
Tu vas te retrouver avec "point 4", "point 5", "point 6"…

… Et ça ne s'arrêtera <u>jamais</u> ! Mais NON, tu ne retomberas jamais sur "point 1" : tu peux le vérifier en utilisant des microscopes de plus en plus puissants…

Et si tu as déjà utilisé le plus puissant des microscopes?
Cela ne prouve que les limites de notre technologie :
imagine un microscope parfait !!!

Peux-tu tracer une ligne ?

"Tracer une ligne" est un abus de langage.
En réalité, tu traces un trait, et pour ça, rendez-vous à l'escale suivante !

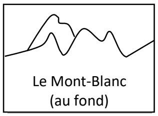
Tous les dessins de ces pages ne sont donc que des traits, qui t'aident à imaginer des lignes. Tu y avais pensé ?

<u>Deuxième escale</u> : qu'est-ce qu'**un trait ?**

Râpe une mine de crayon sur une feuille de papier.
Tu as tracé un trait, en déposant de la poussière de crayon entre les fibres du papier.

Tu pourrais également : imbiber la feuille d'encre (stylo : teinture des fibres),
y incruster des particules d'encre solide (imprimantes à aiguilles…),
y faire fondre de la poussière d'encre, puis la sécher - une sorte de caramélisation !
(photocopieuses, imprimantes laser…),
y projeter de l'encre liquide (imprimantes à jets d'encre)…

… Ou faire apparaître un trait sur toutes sortes de supports(*), par toutes sortes de procédés :
chimiques (photos), optiques (cinéma, laser), électroniques (télévision, moniteurs)…



(*) Sans même parler du bon vieux tableau noir sur lequel tu râpes une craie, dont la poussière se dépose - en partie ! - dans les creux du tableau !

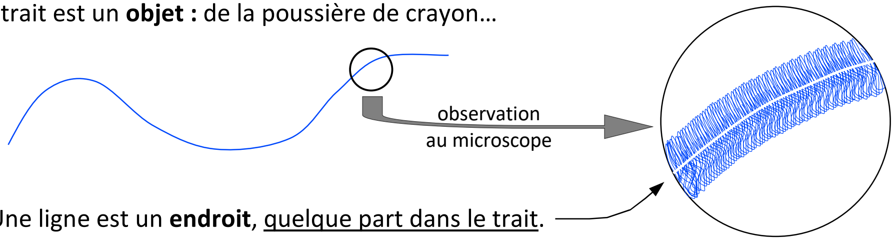
Un trait n'est PAS une ligne, pas plus qu'une photo du Mont-Blanc n'est le Mont-Blanc !
Les traits et les photos sont 2 inventions humaines.

Escale-terminus **:** différence entre **ligne** et **trait**

Lorsque tu traces un trait, c'est comme si tu passais une couche de peinture sur une ligne, avec un pinceau infiniment trop large :

tu occupes la ligne, évidemment, mais tu la débordes, tu barbouilles tout autour.
Même avec un un crayon qui **te paraît** très fin.

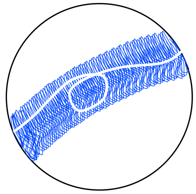
Un trait est un **objet :** de la poussière de crayon…



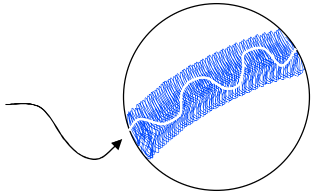
… Une ligne est un **endroit**, quelque part dans le trait.

Au microscope, **le trait devient épais, la ligne n'épaissit pas !**

Bien sûr, la ligne à laquelle je pensais en traçant ce trait pourrait tout-à-fait ressembler à ceci…



… Ou peut-être à cela ?



Mais les mathématiciens ont décidé que les traits qu'ils traçaient devaient donner une idée aussi claire que possible des lignes qu'ils représentaient. Alors reste simple !!!

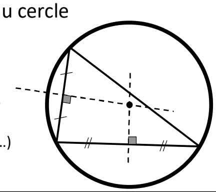
Quel trait veux-tu tracer ?

Les lignes que tu veux mettre en évidence n'ont pas toutes la même importance :
certaines sont les éléments de départ d'un exercice,
d'autres ne sont que des aides à la construction,
d'autres sont tes réponses aux questions posées.

Alors, varie les traits - traits pleins, pointillés, tiretés, mixtes, traits fins ou traits épais,
et utilise - raisonnablement- couleurs et surligneurs.

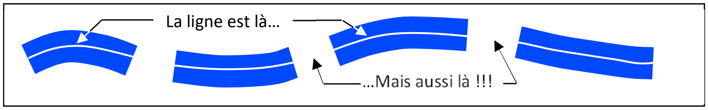
Construction du cercle circonscrit à un triangle :

(Je n'ai pas indiqué les constructions des 2 médiatrices…)



Mais tous ces mots n'ont peut-être pas beaucoup de sens ? Patience ☺

Et une dernière précision :
un trait tireté ne représente PAS une ligne tiretée. Ou alors, tu dois le préciser !



Allez, on rentre au port. Tu as déjà eu une croisière bonus, le pilote est fatigué ! On se reverra ?

Oh là là ma tête !

Mais je crois que j'ai tout compris…
Sauf le truc de retirer le point A à [AB]
et on n'a plus autant de points que dans [CD] !

Ça, vous l'avez toujours pas expliqué !

Parce que si les segments ont
tous autant de points, il suffit de prendre le point de [AB]
qui était juste à côté de A, mettons que je l'appelle P… et
[PB], c'est bien un segment, non ?

Eh oui, il suffit de …

SAUF QUE, pas de chance,
il n'existe pas de point « juste à côté de A »

Imagine un objet ponctuel qui part de B et qui avance vers A, en ligne droite. Il atteint P. Mais il n'est pas encore à A. Donc il va traverser d'autres points pour atteindre A !

Tout est là :

Il n'existe pas de dernier point avant A ☺☺☺

Deuxième voyage

en 1 croisière, 2 escales et 1 excursion

Droite ***Objet linéaire*** ***Entre***

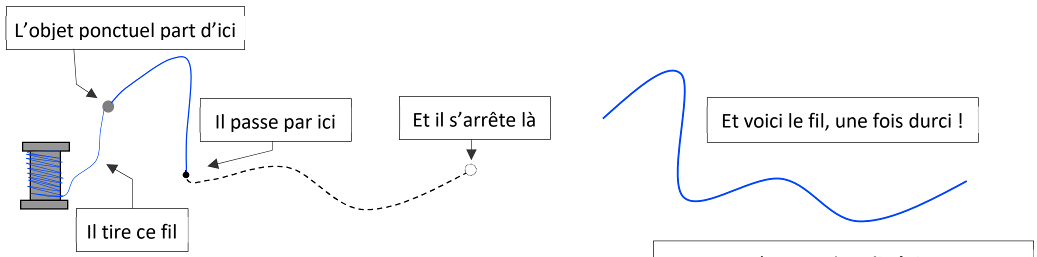
Croisière unique : la droite.

Première escale : qu'est-ce qu'**un objet linéaire ?**

Tu te rappelles qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ?

Imagine maintenant que l'objet ponctuel, en se déplaçant, entraîne derrière lui un fil très fin… Vraiment très très fin ! Encore plus fin que ça ! Un fil pas plus épais qu'un point. Un **fil imaginaire**, bien sûr.
Ce fil matérialise le trajet de l'objet ponctuel : il occupe l'ensemble des points traversés par cet objet.

Et si ce fil, au bout de quelques secondes, durcissait et devenait rigide ?
Tu aurais un objet en forme de ligne - et pas plus gros qu'une ligne ! Un objet que tu pourrais, à son tour, déplacer :



C'est un objet **linéaire**

(ça vient du latin *linea* - ligne -
et ça rappelle qu'il occupe une ligne)

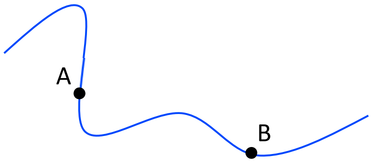
Tu avais déjà un objet ponctuel, te voilà maintenant avec un objet linéaire.

Que vas-tu en faire ? Le déplacer, évidemment !!!

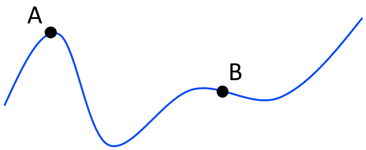
Escale-terminus : qu'est-ce qu'**une droite ?**

Tu as marqué deux points, A et B, sur une feuille. Tu veux déplacer l'objet linéaire que tu viens de créer, pour qu'il passe par ces deux points. Tu peux y arriver de plein de façons différentes :

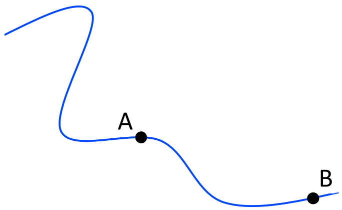
comme ça... :



... comme ça... :

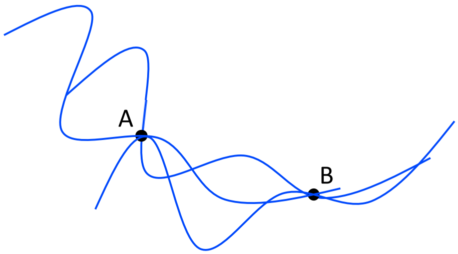


... comme ça... :

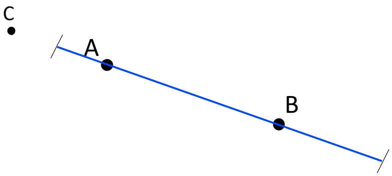


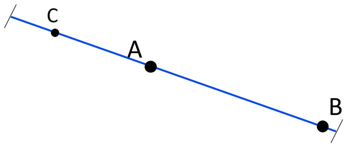
... et encore de bien d'autres façons !

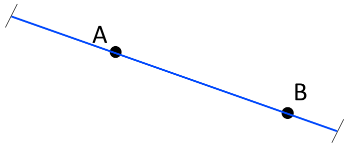
Si je regroupe les trois premières façons sur un même dessin, j'obtiens un joli dessin, qui correspond à 3 trajets différents :



Si tu crées un objet linéaire au hasard, tu lui trouveras également de nombreuses façons différentes de passer par A et B...
Même si par hasard tu penses à un objet linéaire en forme de « segment de droite »
(mais là, j'anticipe, tu ne sais toujours pas ce qu'est un segment ☺) :

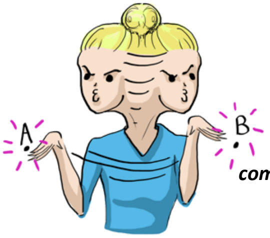






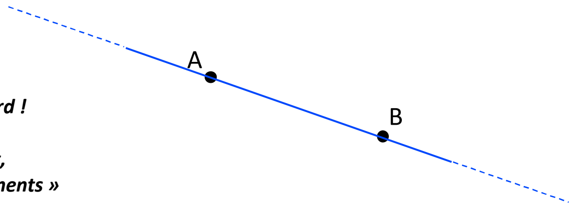
Ces 3 positions correspondent bien à 3 trajets différents d'un objet ponctuel :
dans le deuxième cas, par exemple, il traverse C, alors que dans le premier cas, il ne le traverse pas !

Mais je <u>décide</u> que je peux imaginer un objet linéaire particulier - dont la forme est unique ! - qui, quelle que soit la façon dont il passe par A et B, occupera constamment le même endroit. Exactement le même endroit. L'objet, j'ai choisi de l'appeler un « *OLDI* », pour « ***O***bjet ***L***inéaire ***D***roit ***I***llimité » (ce n'est pas du tout un nom officiel)... Et l'endroit, tu l'appelles **droite**, et tu l'écris (AB).



Mais non, je ne suis pas d'accord !

Je peux faire glisser cet objet,
comme pour les trois « objets-segments »
juste au-dessus...
Et alors, il passera par A et B
de plusieurs façons !



Oui... mais comme cet objet, je l'imagine illimité, il continuera à occuper les mêmes points ! En glissant, il ne fait que se déplacer dans l'endroit illimité qu'il occupe.
Cet endroit que tu appelles « droite » ☺.

Pour te parler de la droite, je me suis servi - sans te le dire - de plusieurs de ces « axiomes » dont je t’ai parlé. Juste pour ta culture générale, je me suis principalement appuyé sur ceux-ci - mais pas uniquement :

Soient deux points, il existe une droite passant par ces deux points.

Soient deux points, il n'existe qu'une droite passant par ces deux points.

Bon, encore une petite excursion avant de quitter la croisière *:*

discrètement caché derrière la droite, un mot qui vaut le détour : le mot « entre » !

Une précision : *Parce que je suis un peu paresseux, j’appellerai en général A, B, C, D, E … les points que j’observe (les lettres majuscules isolées représentent habituellement des points), mais rien ne t’empêche de les appeler K, W, Z …*

Une 2ème précision : *les points que j’appelle A, B, C … Ne sont pas les mêmes d’un exemple à l’autre : en géométrie, les noms « meurent » en même temps que les objets qu'ils désignent, et renaissent plus tard pour de nouveaux objets.*
(Un objet « meurt » lorsqu'on ne s'intéresse plus à lui... c'est bien connu !)

Une dernière précision : *dans mes dessins, je représente les lignes par des traits plus ou moins épais, et les points par des taches plus ou moins grosses - suivant l'importance qu'ils me semblent avoir.*
*Mais tu te rappelles qu’une ligne - **une vraie ligne**, et un point - **un vrai point**, **n'ont pas d'épaisseur** ! Je ne suis qu'un être humain, je ne peux pas faire mieux. À toi de faire fonctionner ton imagination, de « voir » une ligne au cœur de chaque trait, un point au cœur de chaque tache.*

<u>Entre</u> **:** B *est entre* A *et* C.

« Entre » est un de ces mots qui paraissent tout simples... tant qu'on ne creuse pas !

Je ne peux pas plus te le définir que je n'ai pu te définir le point, la ligne où la surface. Mais, là encore, je peux t'en préciser l'idée en m'appuyant sur la notion d'objet ponctuel - qui n'est pas, à proprement parler, un objet mathématique et ne peut donc pas être utilisé pour une définition.

Sans précision supplémentaire, « entre » n'a de sens qu'à propos de points d'une même droite, et dans ce cas, « B *est entre* A *et* C » signifie :

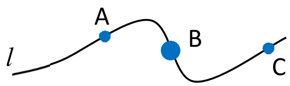
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C,
<u>sans quitter la droite (AC)</u>,
traverse B.

(Oui, bien sûr, il peut aussi se déplacer en allant de C à A... et ça t'amuse ?)

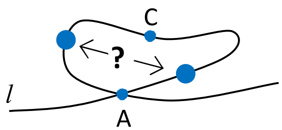
Mais tu peux également utiliser « entre » à propos de points d'une ligne quelconque, en le précisant. Et là, ça se complique un peu :

si A, B et C sont trois points d'une ligne *l*, et si cette ligne *l* ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B *est un point de la ligne l, entre* A *et* C » signifie encore :

un objet ponctuel
qui se déplace en allant de A à C,
<u>sans quitter la ligne *l*</u>,
traverse B.



Mais si la ligne *l* passe plusieurs fois par A et C, « *entre* A *et* C » n'a plus de sens précis.



Troisième voyage

en 2 croisières, 4 escales et 1 excursion

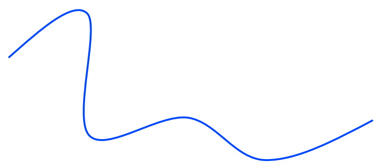
Surface ***Plan*** ***définitions physiques*** ***Espace*** ***Solide***

Première croisière : le plan.

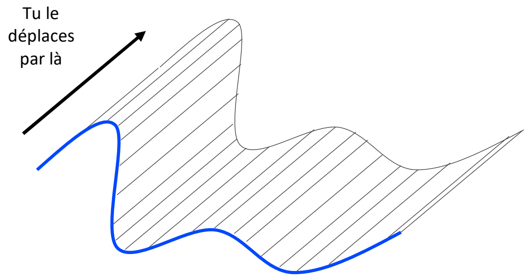
Première escale : qu'est-ce qu'**une surface ?**

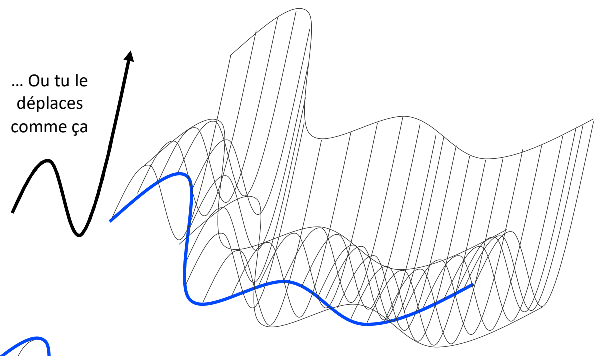
Tu te rappelles qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ? … Pardon, je radote. Mais aussi, l'histoire se répète tellement : une surface, elle, est le trajet d'un objet *linéaire* !
(Comme les lignes, les surfaces sont des ensembles de points, donc des endroits.)

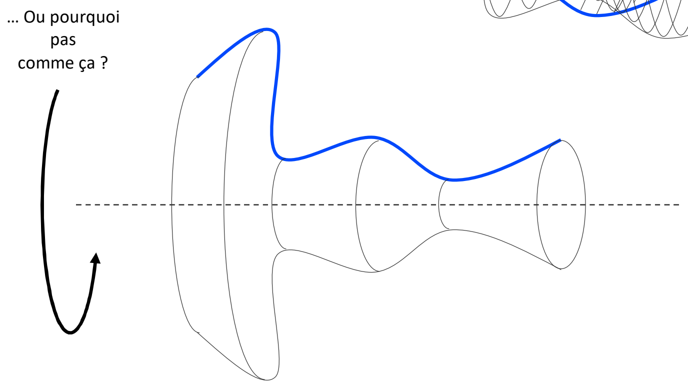
Reprends l'objet linéaire que nous avons créé dans la croisière précédente :



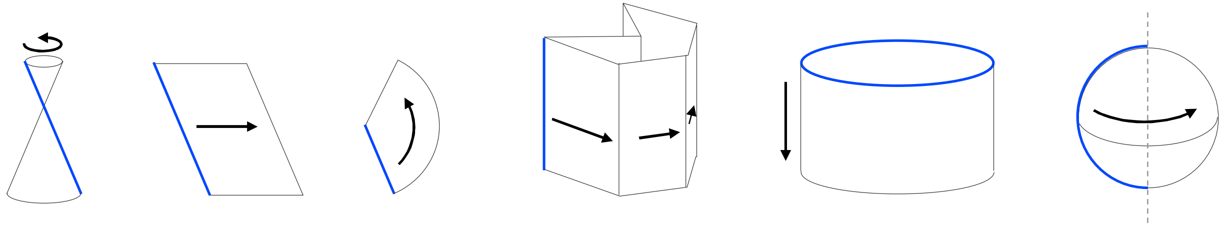
Déplace-le, et observe l'ensemble des points qu'il traverse :







Juste pour le plaisir, voici quelques autres surfaces, créées (en maths, on dit plutôt « engendrées ») à partir d'objets linéaires simples :

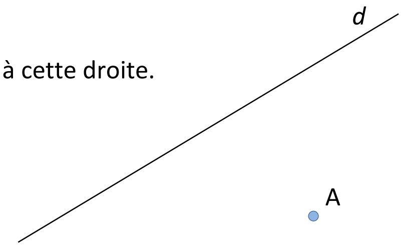


Je ne cherche pas ici à définir rigoureusement la notion de surface (certaines surfaces, vraiment très énervantes, ne peuvent pas être engendrées par le déplacement d'un objet linéaire)… Juste à te donner une idée (superficielle ☺) de ce que c'est !

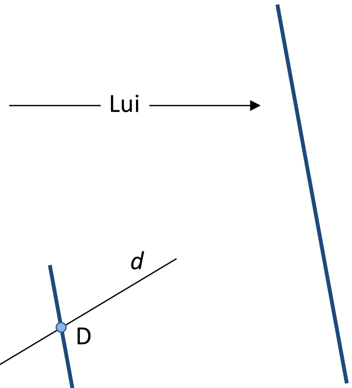
Escale-terminus **:** qu'est-ce qu'**un plan** ?

Imagine une droite et un point qui n'appartient pas à cette droite.

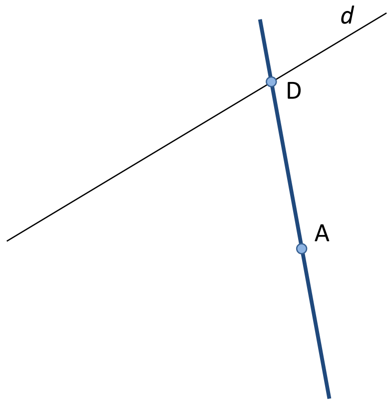
Allez, j'appelle A ce point,
et *d* la droite !



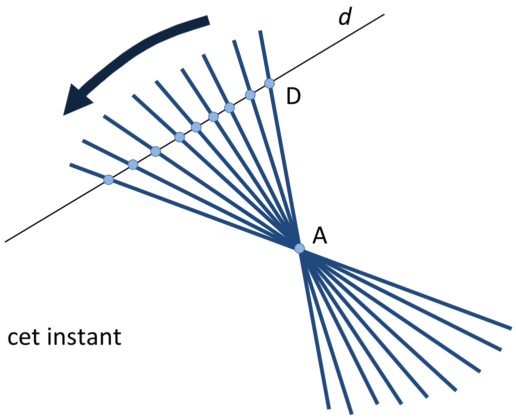
Imagine maintenant un « *OLDI* ».
(un « *O*bjet *L*inéaire *D*roit *I*llimité ». Tu te rappelles ce que c'est :
un objet linéaire qui occupe une droite ? Toute une droite !)
Évidemment, je ne peux te dessiner
qu'une toute petite partie de l'*OLDI*,
Tout comme je n'ai pu te dessiner qu'une toute petite partie de *d* !



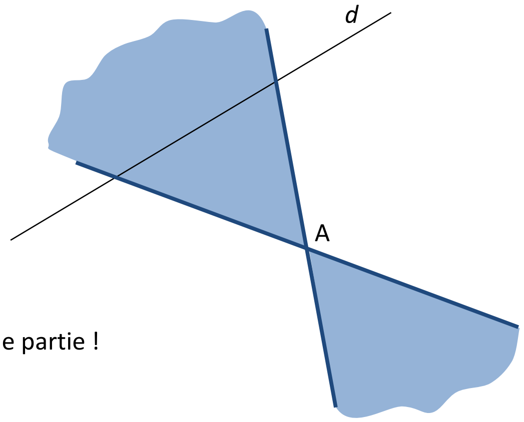
Imagine maintenant que je place cet *OLDI*
de façon à ce qu'il passe par A
et par un point de *d*, que j'appelle D :



Imagine ensuite que je déplace l'*OLDI* :
il continue à passer par A,
et à traverser différents points de *d*
(Imagine qu'il glisse le long de *d*).
Comme ça :



Et moi, je vais continuer à appeler D les points de *d*
que l'*OLDI* traverse lorsqu'il se déplace...
Bien qu'en réalité, il change constamment de point.
D signifiera donc : le point de *d* que l'*OLDI* traverse à cet instant
(« on » l'appelle souvent un « point courant » de *d*).



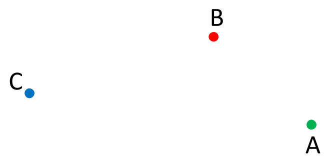
En se déplaçant,
même sur un segment de *d*,
l'*OLDI* engendre une surface immense…
Et même illimitée - parce qu'il est illimité.

Elle ressemble à ça :

Cette surface est une partie d'un plan. Mais juste une partie !

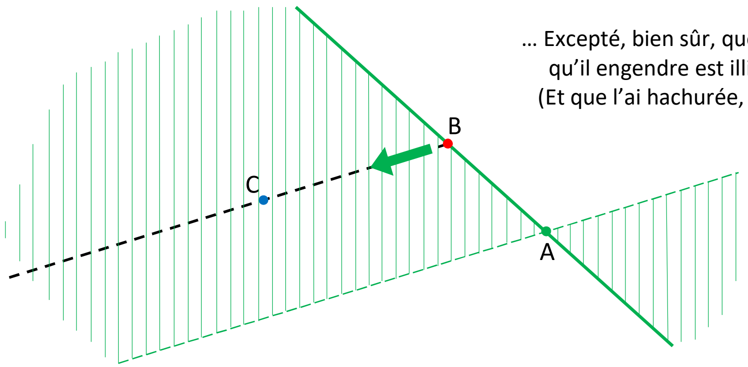
Tu veux engendrer tout un plan ?
Il va te falloir trois points... et trois *OLDI*s !

Commence par choisir trois points, mais PAS trois points de la même droite.
Je les appelle A, B et C.



Place le 1$^{\text{er}}$ *OLDI* de façon à ce qu'il passe par A et B. Puis, sans qu'il quitte A, déplace-le le long de la droite (BC), en direction de C : à chaque instant, il traverse un « point courant D » de (BC)… Mais cette fois-ci, ne te limite pas à un segment : laisse D dépasser C, puis s'enfuir loin de B (l'ensemble de ces « points courants D » s'appelle la « demi-droite d'origine B, passant par C », et se note [BC) … J'y reviendrai bientôt ☺) !

Pour mieux visualiser la surface que l'*OLDI* engendre, imagine qu'il est vert, et qu'il « peint en vert » les points qu'il traverse. Tu vas obtenir quelque chose comme ça :



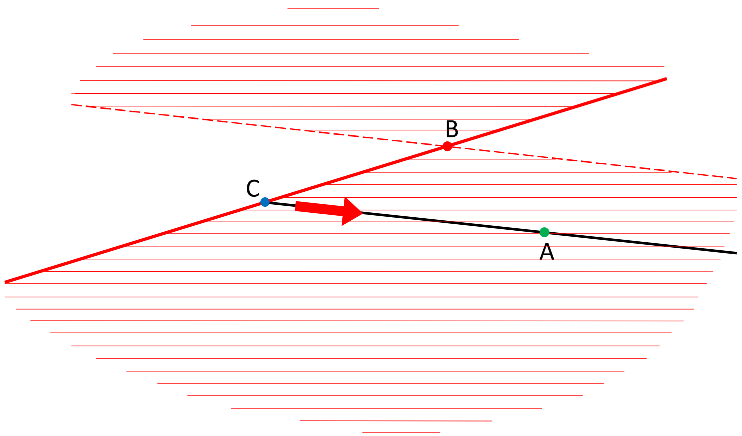
… Excepté, bien sûr, que la surface qu'il engendre est illimitée, elle ! (Et que l'ai hachurée, au lieu de la peindre)

La ligne verte, en pointillés, est une frontière que l'*OLDI* ne peut pas dépasser : plus le point courant D est loin de B, plus la droite occupée par l'*OLDI* est proche de cette frontière…

Attendez, Monsieur ! Laissez-moi deviner… Votre OLDI, il atteindra jamais la frontière, c'est ça ? Parce qu'il y a toujours d'autres points « D », encore plus loin ! C'est ça ? J'ai raison ?

☺ Oui, tu as raison.
Et … Bravo ! Mais c'est une autre histoire. Elle n'est pas trop utile aujourd'hui.

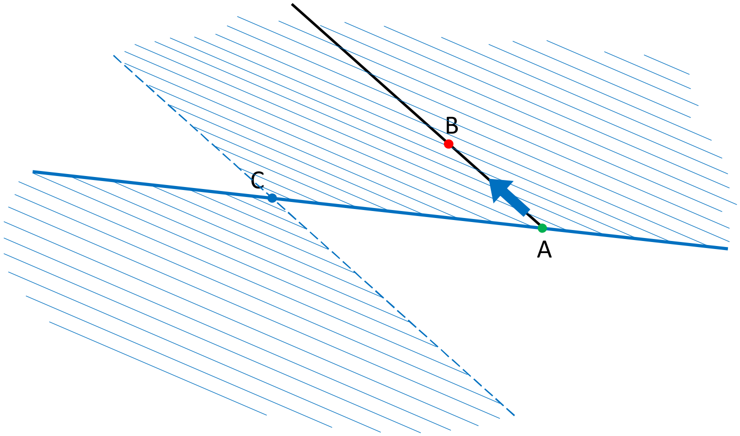
Maintenant, laisse l'*OLDI* vert poursuivre son chemin (tu l'as perdu, il ne reviendra jamais), et recommence avec un *OLDI* rouge qui passe toujours par B et qui glisse le long de [CA). Tu obtiens une nouvelle surface - dont une partie avait d'ailleurs déjà été engendrée par le 1er *OLDI* ☺



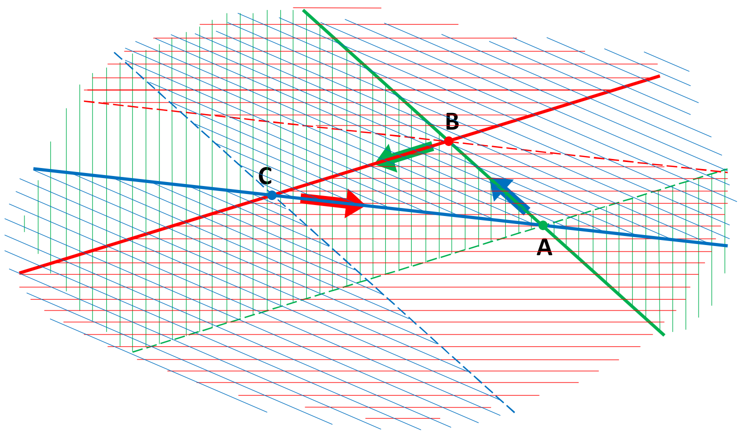
Une nouvelle surface
ET
une nouvelle frontière,
Monsieur !

ET une nouvelle frontière, oui !
Tu y tiens, à ta frontière ☺ !

Et recommence une dernière fois avec un *OLDI* bleu (eh oui, tu as aussi perdu le rouge !) qui passe toujours par C et qui glisse le long de [AB). Nouvelle surface (et nouvelle frontière, je sais !) :



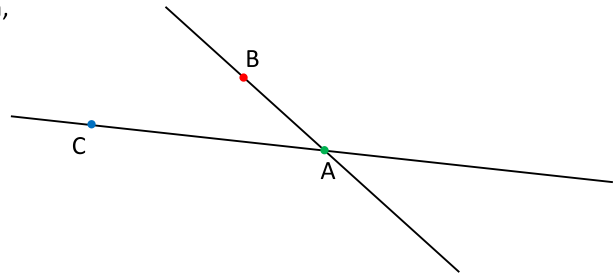
Et finalement, si tu veux avoir une idée de la surface engendrée par les 3 *OLDI*s :



C'est cette surface
- une surface illimitée, bien sûr -
que les mathématiciens appellent
un plan !

Ca te paraît compliqué ?
Bon, voici une autre façon de visualiser ce plan,
toujours à partir des 3 points A, B et C :

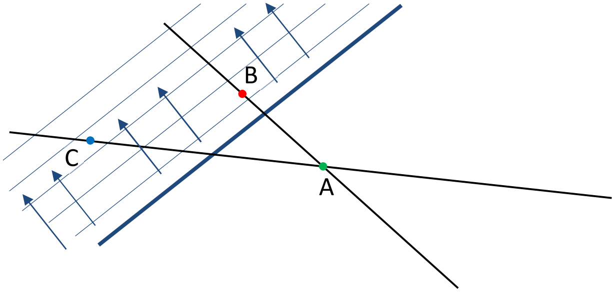
Imagine les droites (AB) et (AC)



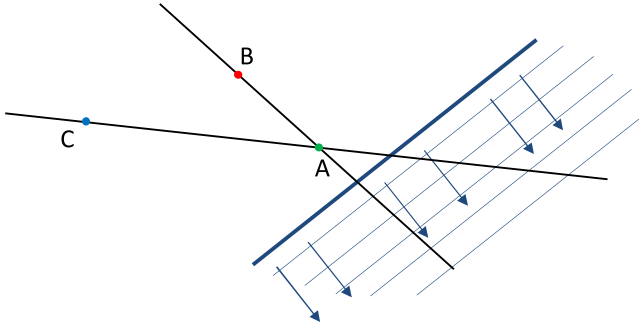
Puis déplace un *OLDI* de façon à ce qu'il reste en contact avec 2 des 4 demi-droites d'origine A

comme ça :

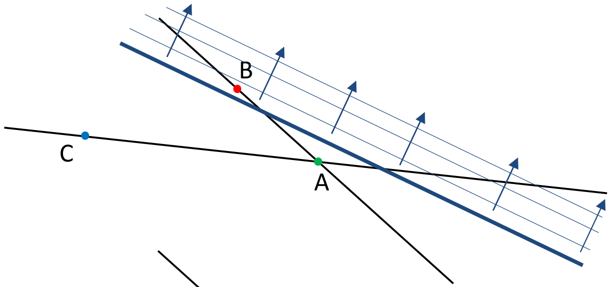
(imagine qu'il glisse comme sur 2 rails)



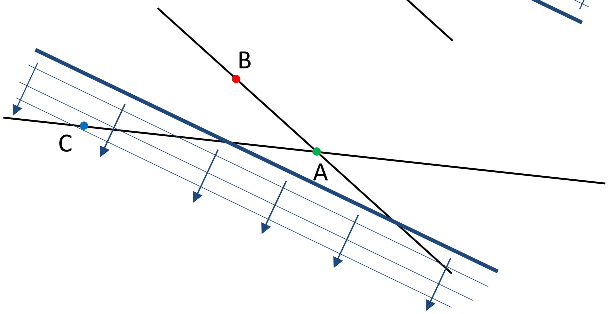
Puis un 2ème *OLDI*, comme ça :



… Un 3ème, comme ça :

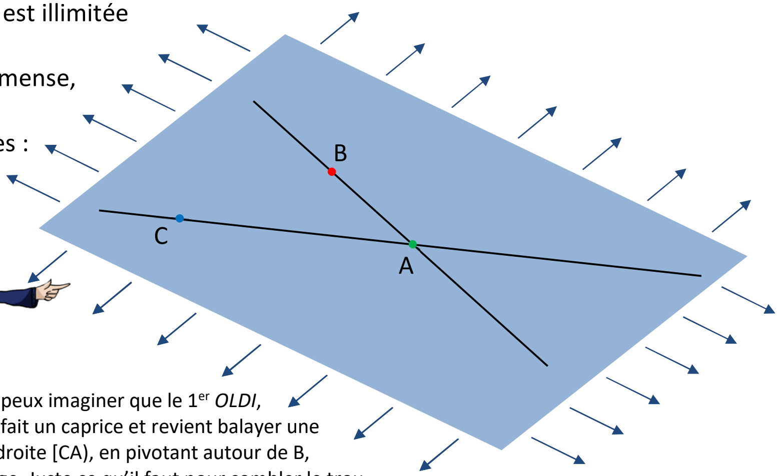


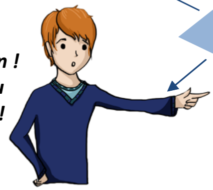
… Et enfin un 4ème, comme ça :



Si tu te rappelles qu'une droite est illimitée
(et tes *OLDI*s également),
tu obtiens la même surface, immense,
que tout à l'heure.
Une surface sans creux ni bosses :

un plan !





Oui… Mais non !
Il reste un trou
autour de A !!!

C'est vrai. Mais tu peux imaginer que le 1er *OLDI*,
lorsqu'il atteint B, fait un caprice et revient balayer une
partie de la demi-droite [CA), en pivotant autour de B,
comme l'*OLDI* rouge. Juste ce qu'il faut pour combler le trou…
Ensuite, il reprend sa position initiale et son chemin.

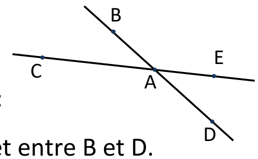
cord, M'sieur, d'accord.
;, euh, y a pas moyen de… D'engendrer un plan d'un seul coup, je veux dire…
: un seul OLDI ? Sans le perdre ? … Finalement, j'y tiens, moi, à vos OLDIs !

D'un seul coup, c'est-à-dire d'un seul mouvement, non… Mais avec un seul *OLDI*, oui. Et sans le perdre ☺ !
Comme ta question me touche, je vais te le montrer… Mais comme je suis un peu fatigué, je vais te laisser « peindre »
les surfaces. Je vais juste t'indiquer les mouvements, d'accord ?

D'accord, M'sieur !

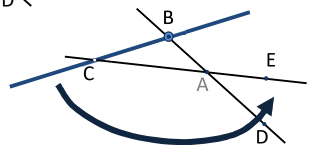
C'est parti ! Un plan, 3ème version :

Pars des 3 points A, B et C que tu connais.

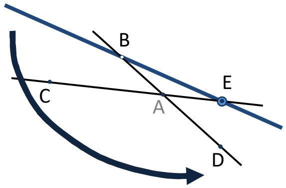


Imagine les droites (AB) et (AC) et 2 nouveaux points :

D sur (AB) et E sur (AC), tels que A soit entre C et E, et entre B et D.

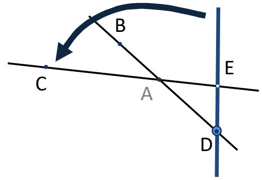


Place ton *OLDI* de façon à ce qu'il passe par B et C,
Puis, sans quitter B, fais-le glisser de C à E tout le long du segment [CE]
- un peu comme l'*OLDI* rouge, mais en l'arrêtant en E !



Ensuite, sans quitter E, fais-le glisser de B à D, tout le long du segment [BD]

… Et enfin, sans quitter D, fais-le glisser de E à C tout le long du segment [EC]



Et voilà. Maintenant, tu peux ranger ton *OLDI*, tu ne l'as pas perdu…
Et il a bien engendré le même plan que les *OLDI*s précédents.

3 points, lorsqu'ils n'appartiennent pas à la même droite, suffisent à déterminer un plan :

dans la 1ère version, tu fais glisser des OLDIs sur 3 ½ droites définies par ces 3 points,
dans la 2ème version, sur 2 droites définies par ces 3 points,
et dans la dernière version, sur 2 segments (sécants) de 2 droites définies par ces 3 points.

Un plan sépare l'univers entier en 3 parties :

l'ensemble des points d'un côté du plan, le plan, l'ensemble des points de l'autre côté du plan…

Et un plan est tellement immense que tu ne peux pas le contourner : si tu veux passer d'un côté à l'autre, tu dois le traverser ! Impressionnant, non ?

(Si ton prof. te parle du « plan du tableau », il veut dire : le plan dont le tableau - imagine qu'il contient ABC - occupe une minuscule partie. Ce plan continue à gauche, à droite, au-dessus et en-dessous du tableau, sans limites. Il traverse la Terre, le système solaire, notre galaxie… Tout l'univers)

<u>Excursion</u> : Neuf « dé-phy » fondamentales.

J'avais commencé par écrire
« neuf défis fondamentaux »
mais je me suis dit que si je commençais
à faire des jeux de mots dans les titres,
tu n'allais vraiment pas prendre ce livre au sérieux !

Euh…Qui vous a dit que je le prenais au sérieux ?

Ce n'est qu'une toute petite excursion de fin de croisière, une petite pause, pour préparer les croisières et les voyages suivants… Tu l'as bien méritée. Savoure-la !

<u>Les « dé-phy », ce sont les « définitions physiques » qui sous-tendent notre géométrie</u>.

Ce ne sont pas de « vraies » définitions, au sens des mathématiques, parce qu'elles utilisent des éléments non mathématiques : des objets, mobiles. Le fait que ces éléments soient imaginaires les rend un peu plus fréquentables, mais pas au point de les introduire dans une définition géométrique. Ils sont toutefois précieux car ils permettent d'éclairer notre vision de la géométrie et d'éviter ainsi de nombreuses erreurs.
Et surtout, ils sont à l'origine implicite de cette géométrie.

Comme je l'ai fait pour les définitions logiques et pour M_{phy}-0, comme je le ferai bientôt pour les « vraies » définitions, les théorèmes et les « métaxiomes », je vais donner un numéro à chacune de ces « dé-phy », et ces numéros - précédés des lettres «$\mathbf{D_{phy}}$» te permettront de les identifier, si nécessaire, tout au long de ce livre. Ce seront leurs noms.

D$_{phy}$-0 ***Objet ponctuel*** : objet imaginaire, « plus petit que petit » : un objet qui, à force d'être réduit, aurait implosé, serait rentré en lui-même. Aucun microscope ne peut l'agrandir.

Je l'imagine souvent lumineux : une sorte d'étoile très proche, que je peux diriger.
(Aucun télescope ne peut non plus agrandir une étoile - à part notre Soleil :
c'est parce que les étoiles, elles, sont « plus loin que loin »)

D$_{phy}$-1 ***Point*** : endroit que seul un objet ponctuel peut occuper exactement (sans en déborder).

D$_{phy}$-2 ***Ligne*** : trajet d'un objet ponctuel (l'ensemble des points qu'il traverse en se déplaçant).

D$_{phy}$-3 ***Objet linéaire*** : objet (imaginaire) qui occupe exactement une ligne.
Aucun microscope ne peut l'épaissir.

D$_{phy}$-4 ***« OLDI »*** (***Objet Linéaire Droit Illimité***) : 2 points étant choisis, objet linéaire qui, quelle que soit sa façon de passer par ces 2 points, occupe toujours exactement le même endroit.

D$_{phy}$-5 ***Droite*** : un endroit que seul un *OLDI* peut occuper exactement.

D$_{phy}$-6 ***Surface*** : trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet n'est pas une ligne.

Surface dégénérée : le trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet est une ligne
(par exemple un objet-segment qui glisse le long de sa droite-support)

ou : le « trajet » d'un objet linéaire immobile ☺

D$_{phy}$-7 ***Plan*** : 2 droites sécantes étant choisies, surface maximale engendrée par un *OLDI* qui se déplace en passant constamment par ces 2 droites, en 2 points (ou plus) distincts
(surface maximale : formée de tous les points pouvant être ainsi traversés par l'*OLDI*).

En chaque position, l'*OLDI* passe par un point - au moins - de chacune des 2 droites... mais l'un de ces points peut être le point d'intersection des deux droites, l'*OLDI* occupant alors l'autre droite !

D$_{phy}$-8 ***Entre*** : A , B *et* C étant 3 points, « B *est entre* A *et* C » signifie :

un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C (ou de C à A),
sans quitter la droite (AC), traverse B.

Si A, B et C sont trois points d'une ligne l, et si cette ligne l ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B *est un point de la ligne l, entre* A *et* C » signifie encore :
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C, sans quitter la ligne l, traverse B.

Juste une petite mise en garde : dans une définition bien construite - qu'elle soit physique ou mathématique, chaque mot a un sens précis, que tu dois respecter ! Par exemple, un objet qui occupe *exactement* une ligne est un objet qui occupe *tous* les points de cette ligne - mais *aucun autre* (il ne déborde pas de la ligne).

En introduction aux « voyages », j'avais écrit que, pour un mathématicien, la géométrie reposait sur trois éléments de base : point, droite et plan. J'avais ajouté que « de base » voulait dire qu'on ne les définissait pas. J'ai tout de même voulu t'en donner des « dé-phy », mais je ne fais que déplacer la notion « d'élément de base » d'un cran, parce mes « dé-phy » s'appuient sur le concept d'objet ponctuel - que je raconte plus que je ne le définis... d'où son numéro zéro ☺ !

Deuxième croisière : les « solides ».

Première escale : qu'est-ce que l'**espace** ?

Je suis sûr que tu as déjà vu des dessins animés où le printemps terrassait l'hiver : au début, sur tout l'écran, un paysage hivernal sinistre, dans les tons sombres, des arbres tout morts, aucun mouvement... puis un trait de lumière apparaît dans un coin, commence à traverser l'écran : là où il est passé, tout devient vert et bleu, lumineux. Des feuilles poussent à toute allure sur les branches, des tas d'oiseaux surgissent de je ne sais où et se mettent à chanter !

Imagine maintenant, il y a près de 14 milliards d'années, la naissance de notre univers : au début, rien. Rien de rien ! Puis, un peu comme dans les dessins animés, un point s'impose dans ce rien. Puis une surface minuscule, autour de ce point : elle l'enferme, comme un sac. Puis le sac grossit, la surface enfle, enfle, enfle... partout à l'intérieur, il y a de l'existence : des ondes, de la matière, parfois de la vie. Et des points, que la matière et les ondes pourront traverser.
À l'extérieur, toujours rien (non, même pas de points : la notion d'endroit n'y a pas encore de sens !)

Eh, M'sieur… Et l'espace, dans tout ça ? J'y viens, j'y viens... tu n'es vraiment pas poète !

Le sens du mot « espace » dépend de la personne à qui tu parles. Il peut s'agir de :

l'espace physique, celui des astronomes. C'est tout ce qui est à l'intérieur du sac : les points, la matière, les ondes... c'est un espace immense (il contient toutes les étoiles !) mais limité : « quelques » millions de milliards de milliards de kilomètres entre deux points extrêmement éloignés l'un de l'autre.

L'espace géométrique sur lequel s'appuient les mathématiques du collège : uniquement les points qui sont à l'intérieur du sac - mais avec l'idée que ce sac n'a pas de limites ! Il peut donc contenir des droites, des plans (un plan est une tranche de l'espace, une tranche dont l'épaisseur est de 1 point)...

D'autres espaces, encore, mais là, ils sont vraiment hors sujet !

L'espace géométrique, donc, est un immense ensemble de points. Les mathématiciens ont pris l'espace physique comme modèle, mais ils l'ont à la fois idéalisé et simplifié : idéalisé, parce que dans l'espace physique, aucun objet ne peut occuper un seul point - et parce que l'espace physique n'est pas illimité. Simplifié, parce que l'espace géométrique n'est qu'un ensemble d'endroits - les points, et que ces points ne sont pas soumis aux lois de la physique : pas de dilatation de l'espace géométrique à prendre en compte, pas d'interactions avec les objets ou les ondes.

Escale-terminus **:** qu'est-ce qu'un **solide** ?

T'es-tu déjà servi d'un moule ? Non, pas un moule à gâteaux ! Un « vrai » moule, un moule à objets (bon, d'accord, les gâteaux sont des objets, et les moules à gâteaux des vrais moules... enfin, presque, parce qu'ils ne sont pas fermés : tu ne peux pas donner la forme que tu veux à la partie supérieure du gâteau - et c'est normal, il doit pouvoir gonfler ☺).

Un (vrai) moule est une boîte que tu dois pouvoir fermer. Totalement, hermétiquement fermer !

Avant de fermer ton moule, tu le remplis (par un petit orifice) avec le liquide qui convient - ça peut-être de l'eau, de la résine, du plastique, un métal en fusion... puis tu fermes l'orifice et tu attends que le liquide durcisse : si c'est de l'eau, tu dois mettre le moule au congélateur - mais je ne te conseille pas l'eau, parce que, contrairement aux autres liquides, l'eau gelée prend plus de place que l'eau liquide et ton moule risque d'éclater !

Lorsque le liquide a cessé d'être du liquide, tu démoules le résultat de ton travail. Parfois, tu dois casser le moule pour y arriver. Si tout s'est bien passé, tu obtiens un objet solide (plus ou moins : les plastiques sont en général moins solides que les métaux) dont la forme correspond à la surface intérieure du moule. Cet objet est un solide au sens de la physique : un bloc de matière limité par une surface. Mais la matière physique est formée d'atomes et un atome, vu au microscope (un microscope très puissant), ça ressemble un peu à notre système solaire : plein de vide et de temps en temps un petit morceau de matière ! Donc, un solide physique n'occupe en réalité qu'une toute petite partie des points de l'endroit où tu le vois.

Et un solide au sens mathématique, alors ?

Oh là là, ce que tu es impatiente ! J'y arrive...

Personne ne peut construire de "vrais solides mathématiques », pas plus qu'il n'est possible de dessiner un point où une ligne. Nous sommes bien trop imparfaits pour ça. Dans un « vrai solide mathématique », la matière occuperait tous les points enfermés par la surface... et la surface serait une vraie surface, pas un morceau de gruyère. Alors, comme pour les points, les lignes, les surfaces, tout ce que nous pouvons faire, c'est - oui, tu as deviné - **imaginer** des solides « parfaits ». À partir de solides qui ne le sont pas !

(D'ailleurs, un « vrai solide mathématique » serait infiniment lourd, puisqu'il occuperait une infinité de points et que la matière contenue dans chacun de ces points pèserait quelque chose... pas grand chose, peut-être, mais une infinité de fois pas grand-chose, ça fait encore trop ! Et pour les mêmes raisons, tous les atomes de l'univers ne suffiraient pas à créer même un tout petit « vrai solide mathématique »)

Un solide mathématique est donc un solide imaginaire, qui occuperait tous les points enfermés dans un espace limité par une surface « étanche » - c'est-à-dire qui sépare tout l'espace géométrique en trois parties : l'espace extérieur (d'un côté de cette surface), la surface elle-même, l'espace intérieur (de l'autre côté de cette surface).

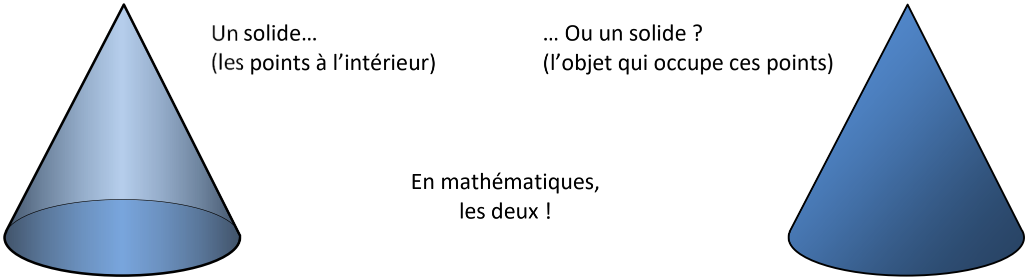
« Étanche » n'est pas un mot du vocabulaire mathématique, mais tu comprends ce que je veux dire, n'est-ce pas ? Aucune ligne ne peut rejoindre un point de l'extérieur à un point de l'intérieur sans traverser cette surface.

C'est ça, vous me prenez pour un demeuré ?

Mais non, justement.
Sinon, je ne te parlerais pas de tout ça ☺ !

Et maintenant, je dois t'avouer quelque chose : je suis très embêté. Vraiment très embêté ! Pourquoi ? Parce que, jusqu'à présent, j'ai bien réussi à faire la différence entre objets et endroits. Et je t'ai dit que la géométrie étudiait des ensembles de points, dont des endroits... mais en classe, ton prof va vraisemblablement te parler de « l'étude des solides ». Je le fais aussi, avec mes élèves - c'est ce qui est écrit dans les programmes officiels. Et un solide n'est pas un endroit ! Alors ?
La vérité, c'est que les mathématiciens n'ont jamais pu se mettre d'accord sur un nom pour « ensemble des points occupés par un solide » : on a essayé « espace » - mais c'était trop vague, ou « volume » - mais ce mot a servi à autre chose (je t'en parlerai plus tard)... finalement, tout le monde a fini par hausser les épaules et s'est dit que « solide », ça ferait l'affaire !

Ce qui fait qu'en mathématique, « solide » représente à la fois un objet et l'espace occupé par cet objet !
(Ce n'est pas très intelligent, d'accord... mais, tu verras, on s'y fait très bien)



… En conclusion :

D$_{phy}$-9 ***<u>Solide</u>*** : objet imaginaire, qui occuperait tous les points enfermés dans un espace limité par une surface « étanche » (qui sépare tout l'espace géométrique en trois parties : l'espace extérieur - d'un côté de cette surface, la surface elle-même, l'espace intérieur - de l'autre côté de cette surface),

ou **:** ensemble des points occupés par cet objet.