LA CREATION DES CHIFFRES

Philippe Colliard 1980

Sur les traces des « Histoires comme ça » de R. Kipling

Il y a très longtemps, bien avant que l'Europe n'existe - en ces temps-là , je crois bien qu'elle était encore rattachée à l'Afrique - les hommes vivaient dans des cavernes, et leurs familles aussi . Pour se nourrir, ils tuaient des poissons et des ours avec leurs harpons, de grandes tiges en bois très pointues et très dures.

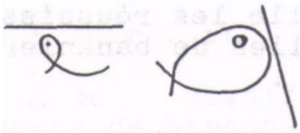
Naturellement ils ne savaient pas compter, puisque personne encore n'avait inventé les chiffres!

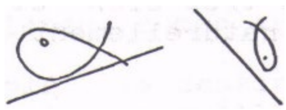
Dans une petite caverne tout près d'une grande rivière vivaient Hi-Ati et ses parents. Hi-Ati était une petite fille très intelligente, dont le nom voulait dire: jeune péronnelle trop curieuse. Elle s'intéressait toujours à tout .
Un jour, son papa revint de la pêche et posa ses harpons et les poissons juste devant l'entrée de la caverne. Et ce jour là, Hi-Ati et son papa créèrent les chiffres...

En sortant de la caverne, Hi-Ati vit les harpons et les poissons. Elle regarda les harpons, puis les poissons, puis à nouveau les harpons et à nouveau les poissons, parce qu'elle méritait bien son nom, et elle s'exclama:

" tu as vu, papa, c'est drôle, il y en a... pareil! "

Elle voulait dire " autant "... Mais le mot " autant " n'existait pas encore. Son papa - il s'appelait Ji-Déhem, c'est à dire " Homme Sage " - ne comprit pas très bien. mais comme il était très sage, il demanda à Hi-Ati de s'expliquer. Elle réfléchit un instant, puis déposa un harpon contre chaque poisson, comme ceci:





Et elle dit à son sage papa:
" Tu vois , il ne reste pas de poisson sans harpon, ni de harpon sans poisson! "

Alors, Ji-Déhem, qui ne s'appelait pas " Homme Sage " par hasard , sut que sa petite fille avait inventé quelque chose d'important. Il dit:
" C'est une grande remarque . Tu deviens tout à fait observatrice... Et j'ai une idée: demain, si je prends " tout ça " de poissons, je ne te les montrerai pas. mais je poserai " tout ça " de harpons devant la caverne. à côté du grand rocher... Et tu prépareras " pareil " de feuilles de bananier... Maman sera étonnée, non? "

(Il disait "tout ça " et " pareil " parce qu'il ne connaissait pas d'autres mots. mais Hi-Ati comprit très bien. Les feuilles de bananier, c'était pour faire cuire les poissons: on les y enroulait et on glissait le tout sous la braise... C'était très bon.)

" Oui... Mais... Et si tu n'as pas assez de harpons? Ou si tu n'as pas été à la pêche mais à la chasse? Je me tromperai et maman se moquera de moi! " .

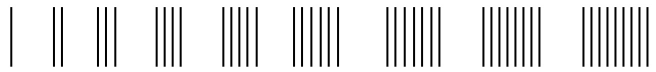
Ji-Déhem sourit d'un côté, pour montrer qu'il se moquait un peu de sa petite fille si susceptible, mais comme elle n'avait pas tout à fait tort, il proposa:
" Alors, au lieu de rapporter " tout ça " de harpons, je les dessinerai sur le gros rocher... Et à côté, je dessinerai un poisson ou un ours, pour que tu saches..."

Et il ajouta , pour faire grimacer Hi-Ati :
" Ou bien je dessinerai un carpoutzi... Et tu sauras que tu dois aller chercher " tout ça " de carpoutzis pour le dessert... " (Le carpoutzi n'existe plus: c'était un gros fruit vert, très lourd, qui poussait près des ronces, et c'était le travail des petites filles d'en rapporter dans les grottes).

Hi-Ati détestait les ronces mais elle dut bien reconnaître que " tout ça " de harpons pouvait servir à indiquer n'importe quoi, même des carpoutzis à rapporter. Il suffisait de dessiner le " n'importe quoi " à côté !

Et pendant le reste de l'après-midi, Hi-Ati et Ji-Déhem s'entraînèrent à dessiner des " tout ça " de harpons sur le gros rocher. Pendant ce temps, la maman de Hi-Ati préparait une bonne soupe de poissons, parce qu'elle les réussissait très bien et aussi parce qu'elle manquait de feuilles de bananier: naturellement, Hi-Ati avait " oublié " d'en cueillir.

Ji-Déhem commença par dessiner ceci:

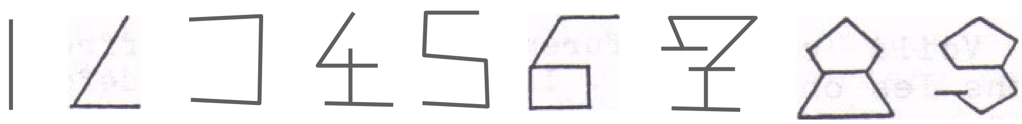


et à chaque " tout ça " de harpons. il donna un nom. Il les appela "shir", "ot", "tir" et d'autres encore. Je ne me rappelle pas bien les noms parce qu'au cours des siècles, ils ont changé: maintenant ils sont devenus "un", "deux", "trois" ...

Ji-Déhem décida de s'arrêter à ||||||||| , parce qu'après, il distinguait mal de quel " tout ça " il s'agissait. Et même comme cela, Hi-Ati n'était pas satisfaite: elle n'était jamais certaine d'avoir lu |||||| ou ||||||| , par exemple. Alors elle eut une autre idée, qu'elle exposa poliment à son papa:
" Dans le fond, papa, ce n'est peut-être pas la peine que tous tes harpons aient la même taille... Après tout, tu peux pêcher des petits poissons avec des petits harpons ... "
Et elle dessina ceci:

C'était déjà plus facile à reconnaître. Mais Ji-Déhem eut encore une bien meilleure idée - il était réellement très sage:
" Tu as tout à fait raison... Mais je ne suis pas non plus obligé de dessiner tous mes harpons plantés dans le sol, n'est-ce pas? Si je fais un dessin avec " tout ça " de traits bien droits - des petits et des grands - tu comprendras que j'ai représenté " tout ça " de harpons, non ? "

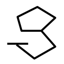
C'était une très bonne idée, et Ji-Déhem chercha avec Hi-Ati des dessins qui représenteraient clairement les " tout ça " de harpons. Cela leur prit beaucoup de temps, parce qu'il leur fallait inventer des dessins faciles à se rappeler et à reproduire, mais suffisamment différents les uns des autres. Finalement, ils dessinèrent ceci:



et ils les appelèrent comme avant : shir, ot, tir …

Par exemple, le dessin  signifiait que Ji-Déhem avait pris autant de poissons qu'il y avait de harpons dessinés dans  . S'il disait " j'ai pris ot poissons ", c'était pareil .

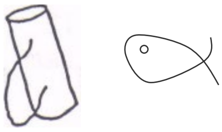
Ji-Déhem décida d'appeler chaque dessin un " thra ". Il fallait bien leur trouver un nom. Un objet sans nom, ce n'est pas très pratique.

Hi-Ati avait voulu s'arrêter à  , parce qu'après. ça faisait trop de harpons à dessiner et qu'elle était peut-être un tout petit peu paresseuse... Alors, pour faire enrager son papa, et aussi pour être certaine qu'il oublierait de créer des chiffres plus compliqués (... Ca, c'est un petit truc que certains enfants utilisent toujours!). elle lui dit :

" Et puis. quand tu vas à la pêche, tu ne rapportes pas toujours du poisson... Comment vas-tu dessiner « pas de poisson » ? "

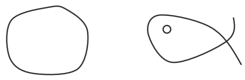
C'était une bonne question... Pas très respectueuse, mais Ji-Déhem était bien trop occupé à réfléchir pour se fâcher. Finalement il proposa:

" Je dessinerai le sac dans lequel je range mes harpons, mais sans les harpons. Comme ceci : "



Ce qui pend sur le côté du sac, c'est la corde pour le fixer sur l'épaule. C'est la maman de Hi-Ati qui avait fabriqué ce sac. Elle était très habile !

Mais Hi-Ati protesta:
" C'est trop compliqué. Tu vas Juste dessiner le dessus du sac, comme cela : "



Et bien sûr ils firent comme ça, et ils appelèrent le dessus du sac "lat-i". ce qui veut dire sac vide.

Maintenant, nous l'appelons "zéro".

Et comme la nuit tombait, Hi-Ati et son papa allèrent déguster la soupe de poissons qui les attendait, et qui était vraiment très bonne. Malheureusement, la maman de Hi-Ati ne m'a pas autorisé à en communiquer la recette: son nom - celui de la maman. pas de la soupe - était Tchor-Naîa, ce qui signifie à peu près " Gentille mais pas toujours commode " .

Voilà comment furent créés les dix chiffres: depuis, beaucoup de gens les ont écrits. Ils ont fini par les déformer un peu.
Ils en ont fait:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 et 0

Là, c'est d'un dessin qui représente Hi-Ati et son papa juste après la création du zéro. Vous pouvez voir que la caverne est très bien tenue parce qu'il y a un paillasson devant l'entrée (en fait, c'est la peau d'un petit animal qu'on appelait un « doormat » et qu'on chassait uniquement pour ça. Cet animal n'existe plus du tout maintenant). Vous pouvez deviner aussi qu'il y a une bonne soupe de poissons qui mijote sur le feu, à cause de la fumée qui sort de la cheminée. La caverne de Tchor-Naîa avait gagné le prix du concours des cavernes les plus agréables de la tribu.

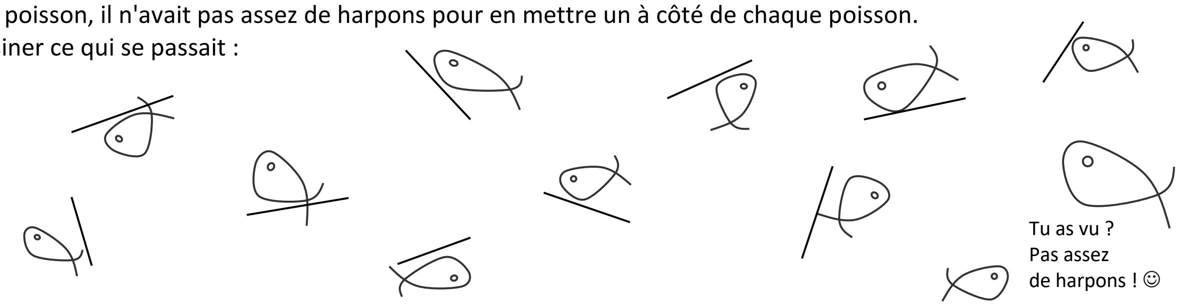
Et là, c'est un portrait de Hi-Ati...
Pour une fois, elle était bien peignée.

LA CREATION DES DIZAINES

Philippe Colliard 1980

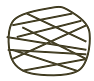
Sur les traces des « Histoires comme ça » de R. Kipling

Or, écoute bien, il arriva un jour que Ji-Déhem, le papa de Hi-Ati, fit une pêche vraiment très réussie, et qu'il attrapa beaucoup de poissons. Il avait encore plus de poissons que de harpons dans son sac : s'il prenait un harpon dans son sac et qu'il le posait à côté d'un poisson, il n'avait pas assez de harpons pour en mettre un à côté de chaque poisson.
Je vais dessiner ce qui se passait :

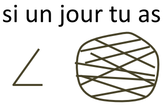


Si avec les harpons tu dessines des chiffres, tu verras que même  ne suffit pas. Pour représenter tous les harpons sortis du sac, il faudrait dessiner un chiffre avec encore un trait de plus - mais ça, tu te le rappelles, Hi-Ati y était tout-à-fait opposée !

Alors Ji-Déhem eut une grande idée :
« puisque tous ces harpons, quand ils sont dans mon sac, le remplissent, je vais juste dessiner un sac plein, pour les représenter. Attends, je sais ce que tu vas me dire : c'est trop compliqué.
Bon, alors…
Et si je dessine juste le dessus du sac – mais avec plein de traits à l'intérieur, pour que tu saches qu'il est plein ? Comme ça :

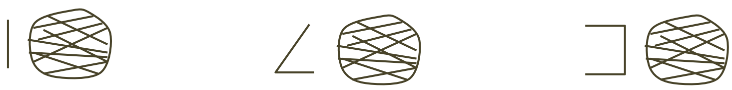


Et tu sauras que c'est  harpons et encore un harpon de plus ».

Hi-Ati réfléchit et dit :
« d'accord, mais tout ces traits à faire à l'intérieur, c'est fatigant. Et puis, je ne les verrai peut-être pas bien, et je risque de prendre le sac plein pour le sac vide. Est-ce que tu ne pourrais pas dessiner un harpon devant le sac plein, pour dire qu'il y a « un » sac plein ? Comme ça, je ne le confondrai pas avec le sac vide, qui est tout seul.
Et puis comme ça, si un jour tu as beaucoup plus de harpons, tu pourras les mettre dans deux sacs pleins ?
Tu dessinera ça :  »

(N'est-ce pas que Hi-Ati était vraiment une petite fille pleine de sagacité ?)

Elle réfléchit encore un peu, en faisant des grimaces (ça l'aidait à réfléchir et Ji-Déhem, qui était un homme sage, ne l'en empêchait jamais), puis elle dit : « et si tu as vraiment beaucoup beaucoup de harpons, tu pourras même continuer :



Et je lirai « un » sac plein, « deux » sacs pleins, « trois » sacs pleins... »

(Non, bien sûr, elle ne parlait pas comme toi ! Elle disait «shir lat-aï » au lieu de « un sac plein », car « sac plein » se disait «lat-aï »)

Son papa rit beaucoup à l'idée de tous les harpons que ça représentait et prévint Hi-Ati que jamais il n'accepterait d'emporter tous ces harpons à la fois sur son dos. Mais comme il était réellement un bon papa, il accepta que Hi-Ati écrive les sacs pleins avec un chiffre devant (oui, un « thra »… Maintenant, tu te le rappelles, c'est ça ?).

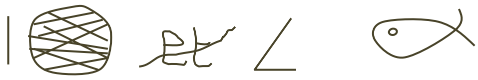
Alors, Hi-Ati, tout contente, put enfin dessiner combien de poissons son papa avait péchés.

Elle prit tous les harpons qu'il y avait dans le sac, et les posa près des poissons (sauf qu'elle n'avait pas assez de harpons pour tous… Et ça, c'est le dessin que je t'ai fait tout en haut de la page).

Puis elle mit ailleurs (de l'autre côté du gros rocher où ils avaient dessiné les premiers chiffres – tu t'en souviens ?) tous les poissons qui avaient un harpon près d'eux, et elle dit : « voilà déjà autant de poissons qu'il y a de harpons dans un sac plein ! »
Et elle écrivit :  (« shir lat aï » poissons… J'ai oublié comment on disait « poissons » ☺)

Ensuite, elle ramassa les harpons qui étaient derrière le gros rocher avec les poissons déjà dessinés, elle remit les harpons dans le sac (tu te rappelles que Tchor-Naîa - sa maman - tenait beaucoup à ce que tout soit bien rangé ?), enfin, elle retira du sac autant de harpons qu'il lui en fallait pour poser à côté des poissons restants. Cela faisait ∠ harpons.

Donc son papa avait péché tout ça - et elle dessina : 

Ji-Déhem regarda le dessin en souriant,
puis il prit un bout de craie
et barra le « et » en disant : « tu n'en as pas besoin ». 

Et c'était vrai. Ils voyaient très bien tous les deux que  ,

ça voulait dire « autant de poissons que de harpons dessinés dans un sac plein et le dessin ∠ ensemble ».

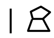
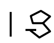
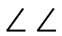
Et ils jouèrent à faire des dessins de sacs pleins et de « chiffres ». Mais à la fin, Hi-Ati en eut assez de tracer plein de traits dans le sac plein et elle demanda à Ji-Déhem de dessiner des sacs pleins plus petits.
Comme ça : 

(et ça voulait toujours dire « autant de poissons que de harpons dans un sacs plein et deux en plus »)

Et puis encore plus tard, comme elle était vraiment très fatiguée, Hi-Ati ne dessina même plus du tout le sac plein, en disant à son papa qu'il n'avait qu'à imaginer qu'elle l'avait dessiné entre les deux chiffres.
Comme ça : 

Ji-Déhem vit qu'elle avait raison (t'ai-je dit que c'était un homme sage ? Oui, n'est-ce pas ?)
Et il fut tout émerveillé d'avoir une petite fille si intelligente.

Et voilà. Maintenant tu sais comment Hi-Ati et Ji-Déhem ont créé les dizaines !

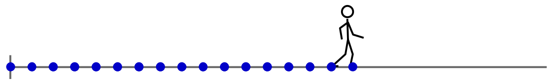
	un sac plein de harpons et zéro harpon en plus : maintenant tu dis « une dizaine », ou « dix »
	un sac plein de harpons et un harpon en plus : « une dizaine et un», ou « onze »
	un sac plein de harpons et deux harpons en plus : « une dizaine et deux», ou « douze »
	… … … … … …
	un sac plein de harpons et sept harpons en plus : « une dizaine et sept», ou « dix-sept »
	un sac plein de harpons et huit harpons en plus : « une dizaine et huit», ou « dix-huit »
	un sac plein de harpons et neuf harpons en plus : « une dizaine et neuf», ou « dix-neuf »
	deux sacs pleins de harpons et zéro harpon en plus : « deux dizaine et zéro», ou « vingt »
	deux sacs pleins de harpons et un harpon en plus : « deux dizaines et un», ou « vingt et un »
	deux sacs pleins de harpons et deux harpons en plus : «deux dizaines et deux», ou « vingt-deux »
	… … … … … …
	… … … … … …

(Plus tard, Ji-Déhem s'est aperçu qu'il y avait autant de harpons dans un sac... Que de doigts dans ses deux mains ! Et quand il l'a dit à Hi-Ati, elle a éclaté de rire et elle lui a montré le plus gros de ses harpons : « regarde, un harpon-pouce ! ». Elle riait tellement qu'elle s'est écroulée par terre !!! N'empêche, c'était vraiment une bonne remarque de Ji-Déhem, et je connais des personnes qui s'en servent encore pour calculer... Non, je ne donnerai pas de noms ☺)

Un survol des acquis du cycle 3

Les nombres

Au début était une demi-droite :



une sorte de route à une dimension, sur laquelle un robot-marcheur en deux dimensions (tout plat) avance d'un pas parfaitement régulier.

Les ***entiers naturels*** sont les nombres qui permettent de compter ses pas. Ce sont les premiers nombres et il y a bien longtemps, ils servaient à compter des objets, ou des personnes, ou des moutons... en leur associant des cailloux : c'est l'origine du mot « calcul » (calculus, en latin : petite pierre).

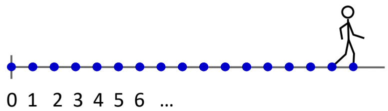
Ne confondez pas « chiffre » et « nombre » : un chiffre est un caractère qui sert à écrire des nombres, tout comme une lettre est un caractère qui sert à écrire des mots.

Toutefois, et comme pour les mots, il existe des nombres formés d'un seul chiffre,
comme « 7 » dans « une semaine a 7 jours ».
Pourquoi « 7 » est-il un nombre, ici ? Parce que, dans cette phrase, il joue le même rôle que, par exemple, le nombre 12 : avec un autre calendrier, on pourrait très bien dire « une semaine a 12 jours » ! (Avez-vous remarqué que dans cette phrase, « a » est un mot formé d'une seule lettre ?)

QUI a créé les chiffres ? Vous trouverez sans peine sur le web – en texte ou en vidéo - des réponses très sérieuses à cette question... et vous trouverez également sur le site du livre une réponse bien plus fantaisiste, inspirée de « Comment naquit la première lettre » du grand écrivain Rudyard Kipling (dans « Histoires comme ça ») :

http://maths-cycle4.fr *La création des chiffres*.

Mais les entiers naturels n'ont pas seulement permis de compter les pas :
ils ont également permis de les marquer. Comme ceci :



Et cette remarque nous permet à son tour d'introduire la notion de « demi-droite graduée » !

Demi-droite graduée :

Associez le nombre 0 à l'origine de la demi-droite, et le nombre 1 à un autre point de cette demi-droite.
À chaque point de la demi-droite correspond alors un nombre unique : vous avez « gradué » la demi-droite.

Des très grands nombres…

Parce qu'une demi-droite est illimitée, le robot-marcheur pouvait s'y aventurer très loin, si loin qu'il vous a fallu apprendre à **lire, écrire et manipuler de très grands nombres** : jusqu'au milliard, voire plus !

Les manipuler, c'est-à-dire les repérer ou les placer sur une demi-droite graduée en milliers, millions ou milliards au lieu d'être graduée en unités - ce qui revient à imaginer qu'on observe la demi-droite en étant de plus en plus éloigné d'elle (une sorte de « zoom inverse »).

Vous avez également appris à les nommer, à les comparer entre eux, à en ranger un ensemble par ordre de grandeur ou encore à déterminer un encadrement de l'un de ces nombres.

Mais pourquoi, dès le cycle 3, s'être intéressé à des nombres immenses ?

Parce qu'il n'y a plus d'âge pour y être confronté !
Par curiosité, pour certains d'entre vous : pour découvrir l'astronomie ou peut-être pour suivre les progrès de l'exploration de notre système solaire. Ou encore pour que la théorie du « big-bang » commence à prendre du sens. Ou pour remonter aux origines de la vie, pour aborder la théorie de l'évolution.

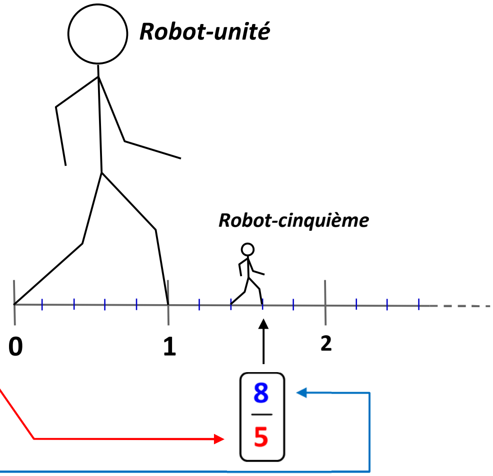
Mais principalement parce que dans votre vie courante ces nombres ont pris de l'importance, ne serait-ce qu'en informatique, en vidéo, pour quantifier des capacités de stockage de données (selon les normes du Bureau International des Poids et Mesures, un kilooctet signifie bien 1000 octets : 1024 octets représentent un kibioctet – pour « kilo binaire »).

… aux très petits nombres

À l'inverse des très grands nombres, et parce qu'il est également possible d'observer une demi-droite en en étant de plus en plus proche (un « zoom normal » ou à l'aide d'un microscope), le cycle 3 nous a permis d'introduire de nouveaux nombres - parfois, de très petits nombres - les ***fractions*** : nous les avons définies sur le modèle des nombres entiers, mais en *fractionnant* les pas d'un robot-marcheur initial (le « *robot-unité* »), c'est-à-dire en les séparant en pas plus petits - tous de même taille. Appelons-les des « *petits-pas* ».

Si, par exemple, nous décidions de séparer chaque pas en cinq, les « petits-pas » seraient des « cinquièmes-de-pas » :
il nous suffirait d'imaginer un robot cinq fois plus petit que le robot-unité (ou un robot unique, mais capable de régler ses pas - et donc de passer du mode « unité » au mode « cinquième-de-pas ») !

Nous avons découvert comment écrire ces fractions,
et que cela nécessitait deux entiers :



l'un d'eux (le « ***dénominateur*** », en bas)
indiquait en combien de « petits-pas »
nous avions décidé de fractionner le pas-unité
(ou encore : de combien de fois nous avions choisi de réduire le robot unité pour obtenir le nouveau robot)

l'autre (le « ***numérateur*** », en haut)
indiquait le nombre de « petits-pas » du nouveau robot,
à partir de l'origine de la demi-droite.

Comme l'illustre le tableau de la page suivante, une fraction (comme tout nombre) « marque » un point d'une demi-droite graduée. Vous avez toutefois constaté qu'une fraction a de nombreuses écritures, associées à des choix différents de partage d'un pas-unité en pas plus petits : si un « petit-pas » donné permet d'atteindre un point de la demi-droite graduée, de nombreux autres « petits-pas » permettront également de l'atteindre.

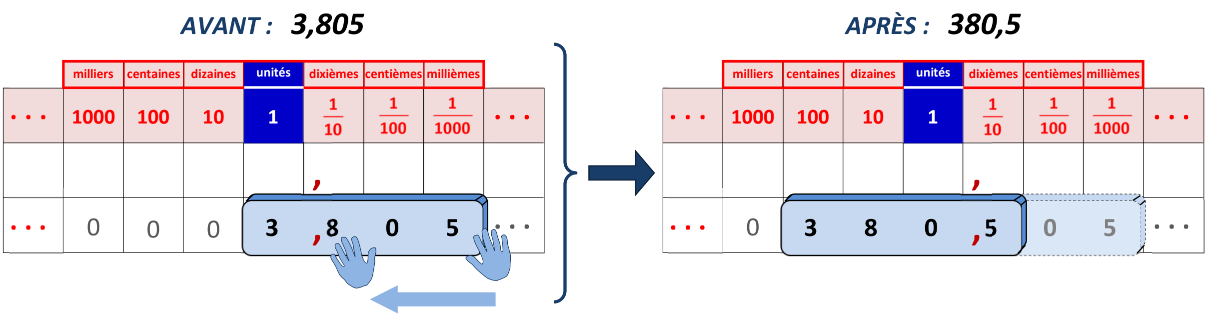
Ainsi, tous les points atteints par des « moitiés de pas-unité » pouvaient également être atteints par des « quarts de pas-unité », par exemple. Sans que cela vous surprenne particulièrement puisqu'un quart est deux fois plus petit qu'une moitié (dans une unité, il y a *deux* moitiés, mais *quatre* quarts) :

si les pas d'un enfant sont deux fois plus petits que ceux d'un adulte, l'enfant sera toujours capable d'atteindre les mêmes marques que l'adulte... mais en faisant deux fois plus de pas !

En fin de cycle 3, différentes fractions faisaient donc déjà partie de votre univers, et différentes écritures de ces fractions. Des fractions dont le dénominateur était très simple : des demis, des tiers, des quarts, des cinquièmes. Vous avez appris à les repérer ou à les placer sur une demi-droite graduée, à les encadrer par deux entiers successifs - et à leur associer une écriture de la forme « nombre entier plus reste fractionnaire » :

sur l'exemple du dessin précédent, $\frac{8}{5}$ devenait facilement $1+\frac{3}{5}$!

Mais tout particulièrement, vous avez découvert les fractions décimales (celles dont le dénominateur peut être 1, 10, 100, 1000, etc.) et, par extension, les ***nombres décimaux***.



Les positions différentes des quatre étiquettes de la page précédente sont une bonne illustration de ce paragraphe.

Évidemment, en ne regardant que l'étiquette nous avons l'impression que c'est la virgule qui a bougé : illusion d'optique. Mais virgule ou grille, tout est relatif, alors pour ne pas perturber une habitude bien établie, nous retiendrons les « *décalages **apparents*** » de la virgule !

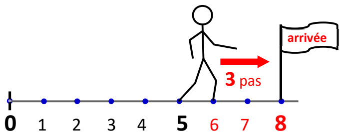
« *décalage apparent* » de la virgule : vers la droite augmentation, vers la gauche diminution !

Le calcul

Une première famille d'opérations : l'addition et la soustraction

L'addition : ce fut votre première opération. Entre nombres entiers, pour commencer, puis entre nombres décimaux (et même, discrètement, dans des cas simples, entre un entier et une fraction !) Dans tous les cas, il s'agit d'une opération entre nombres, et chaque nombre « marque » un point sur une demi-droite graduée. Nous pouvons donc définir l'addition comme une succession d'actions du robot-marcheur (le mot « opération » dérive du mot latin « operare », qui signifiait - entre autres - « s'exercer, agir »).

Ainsi, pour le robot, « ajouter trois à cinq » correspond à :



se placer sur le point « marqué » 5
puis **avancer** de trois pas-unités (**ajouter** 3)
afficher la « marque » de sa position.

En termes de **programmation**, cela supposerait de concevoir quatre procédures simples, puis de les « appeler ».

***Les procédures* :**

INIT	***initialisation*** : robot « sur » l'origine, tourné vers « l'horizon libre » (les grands nombres)
PLUS(n)	le robot **avance** de n pas-unités
SUR(n)	le robot se place sur le point « marqué » n : SUR(n) est composée de INIT puis PLUS(n)
PAUSE	fin d'une séquence. Le robot reste sur place, affiche la « marque » de sa position.

Le programme d'addition, appliqué à 5 + 3 *(ajouter trois à cinq)* : **INIT SUR(5) PLUS(3) PAUSE**

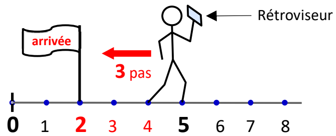
Cycle 3

Comme le robot peut adapter ses enjambées au type des nombres utilisés, il vous a été facile d'imaginer une addition entre, par exemple, un nombre entier et un nombre décimal, voire deux nombres décimaux. Et de constater que le résultat de votre addition ne dépendait pas de l'ordre dans lequel vous écriviez ses termes :

5 + 3 = 3 + 5 (les mathématiciens disent que l'addition est une opération commutative)

La soustraction : une fois l'addition créée, elle devait rapidement suivre - il suffisait de remplacer la seconde action « avancer » par l'action « reculer ».

« Soustraire trois à cinq » correspondait donc à :



se placer sur le point « marqué » 5
puis **reculer** de trois pas-unités (**soustraire** 3)
afficher la « marque » de sa position.

En termes de **programmation**, cela supposait de concevoir une nouvelle procédure simple, à rajouter aux précédentes :

La procédure : **MOINS(n)** le robot recule de n pas-unités

Le programme de soustraction, appliqué à 5 – 3 *(soustraire trois à cinq)* : **INIT SUR(5) MOINS(3) PAUSE**

Mais évidemment, vous avez rapidement découvert deux défauts importants de l'opération que nous venions de créer :

d'une part, une fois un nombre choisi, vous ne pouviez pas lui soustraire un nombre plus grand que lui (suivant la façon dont il serait programmé, le robot marcheur s'arrêterait à l'origine, ou tomberait en arrière, ou peut-être exécuterait les mouvements du recul - mais sans pouvoir reculer !)

Et d'autre part, les deux termes d'une soustraction ne sont pas interchangeables (la soustraction n'est pas une opération commutative) :

5 – 3 ne peut pas être égal à 3 – 5, puisque 5 – 3 existe, mais pas 3 – 5 !

(Vous découvrirez au cycle 4 qu'en réalité, 3 – 5 existe également... mais il n'est toujours pas égal à 5 – 3)

Après avoir défini l'addition et la soustraction, vous avez appris à les pratiquer : « de tête » - c'est-à-dire mentalement - sur des nombres simples, ou en les « posant », lorsque vous deviez opérer sur des nombres plus compliqués.

Calculer une addition posée - entre deux nombres décimaux - repose sur la répétition d'un programme (un « algorithme ») élémentaire, qui « travaille » sur deux colonnes décimales successives, en partant de la colonne le plus à droite, et qu'on décale d'un cran vers la gauche lorsque ce travail est achevé : par exemple, colonne des dixièmes et colonne des unités, puis colonne des unités et colonne des dizaines, puis colonne des dizaines et colonne des centaines, puis colonne des centaines et colonne des milliers.

Une deuxième famille d'opérations : la multiplication et la division

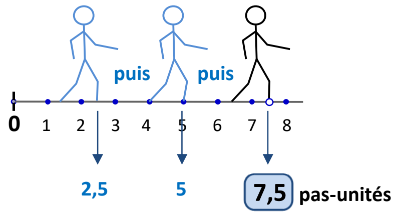
Ces deux opérations ont occupé une grande partie de vos années de cycle 3, et pour cause : d'une part, elles sont plus complexes que l'addition ou la soustraction - auxquelles, d'ailleurs, elles font appel ! - et d'autre part, il vous aurait été extrêmement difficile de poursuivre vos études sans les maîtriser : elles sont partout.

La multiplication : cinq étapes pour comprendre ce qu'elle est et comment la poser

Première étape : deux interprétations de la **multiplication de 2,5 par 3**

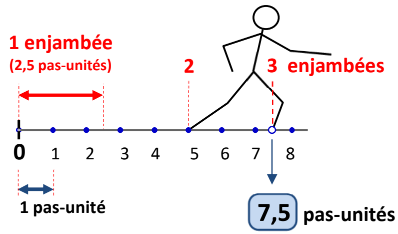
Une définition numérique : $2{,}5 \times 3 = 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5$

Pour parcourir 2,5 pas, le robot se règle d'abord en « mode unité » (pour deux pas),
puis il a le choix : ou bien il se réduit - ou règle ses pas - en dixièmes de pas-unité,
ou bien il se règle directement en demi-pas-unités (pour 1 demi-pas),
puisque 5 dixièmes = 1 demi !



Une vision robotique :

le robot-marcheur quitte le « mode unité »,
règle ses enjambées à 2,5 pas-unités,
puis avance de 3 enjambées !

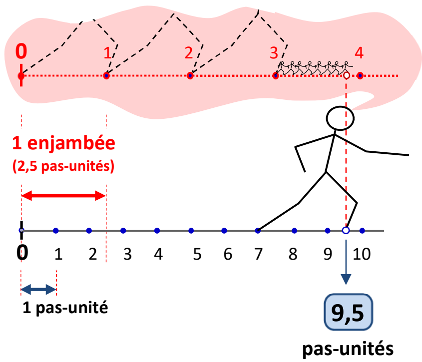


Mais comment interpréter **2,5 × 3,8** ? … **Que signifie 3,8 enjambées ?**

Le robot fonctionne alors en mode « ***réalité virtuelle*** » :

il « *se voit sur* » une *demi-droite graduée virtuelle* dont le pas-unité correspond à son enjambée (donc 2,5 pas-unités-réels)

Sur cette demi-droite virtuelle,
il « *se voit* » avancer de *3 pas-virtuels* (trois enjambées !)
puis il règle ses pas en *dixièmes de pas-virtuels*
- ou, comme sur le dessin, il se réduit au dixième de sa taille -
et avance encore de 8 de ces nouveaux pas (8 dixièmes-d'enjambée).



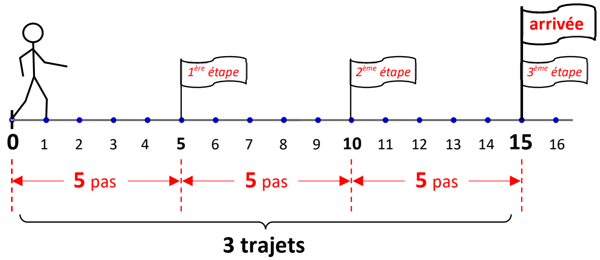
La division : cinq étapes pour comprendre ce qu'elle est et comment la poser

Première étape : deux interprétations de la **division de 15 par 5**

Une définition traditionnelle :

Diviser, c'est séparer (*divide et impera* - proverbe latin : divise et tu régneras) mais séparer en quantités égales : sur une demi-droite graduée, **diviser 15 par 5** signifie séparer le trajet du point origine au point « marqué **15** » en trajets de **5** pas, puis compter le nombre de ces trajets : ici, **3** !

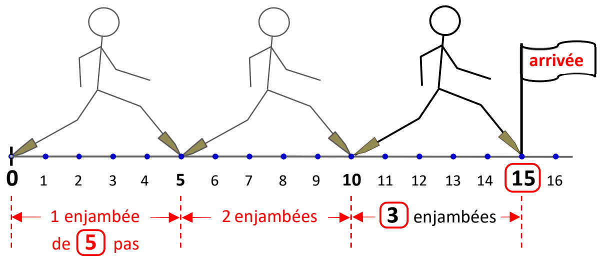
15 ÷ 5 = 3



Une vision robotique :

il nous suffit d'imaginer un robot-marcheur dont nous réglons chaque enjambée à 5 pas-unités :
un robot avec des « **bottes de 5 pas** » (à défaut de « bottes de sept lieues »),
puis de compter le nombre de ses enjambées jusqu'au point « marqué 15 », depuis l'origine de la demi-droite :

15 ÷ 5 = 3



Deuxième étape : de la table de multiplication aux multiples et aux diviseurs d'un nombre entier

Vous avez appris que les multiples d'un nombre entier étaient les nombres obtenus en multipliant cet entier par un autre entier - ou par lui-même... et en mémorisant la table de multiplication de 0 à 9, vous avez évidemment mémorisé les premiers multiples des premiers nombres. Par exemple, les premiers multiples de 5 sont tous les nombres qui sont sur la ligne (ou sur la colonne) de 5 : 0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35 , 40 , 45 !

Quel rapport avec la division ? Vous avez vite remarqué que « **le résultat de la division de 15 par 5 est 3** » (ou, plus précisément : le **quotient** de la division de 15 par 5 est 3) **correspondait à « 15 est un multiple de 5 »** (puisque **15** = 3 × **5**).

Et cette remarque vous a très simplement conduits à la notion de diviseur(s) d'un nombre entier :
« **15 est un multiple de 5 »** et **« 5 est un diviseur de 15 »** sont deux façons différentes de décrire la même situation (avec toutefois une exception que nous aborderons en cycle 4 : 0 est un multiple de 0 , mais 0 n'est pas un diviseur de 0) !

À son tour, « 5 est un diviseur de 15 » vous a conduits à une nouvelle question : **15 a-t-il d'autres diviseurs ?**
Vous avez évidemment observé que 1, 3 et 15 étaient les seuls autres diviseurs de 15, ce qui vous a peut-être amenés à remarquer qu'un nombre entier avait une infinité de multiples, mais seulement quelques diviseurs - et qu'ils étaient souvent bien difficiles à découvrir !

À défaut de savoir déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier, vous avez tout de même appris à déterminer si 2, 3, 4, 5, 9 ou 10 en faisaient partie. Ou, ce qui revient au même, à déterminer si ce nombre entier était un multiple de 2, 3, 4, 5, 9 ou 10.
Pour le savoir, vous avez appliqué trois procédés (des algorithmes) mentaux très simples :

un nombre est un multiple de 2, 5 ou 10 si le chiffre des unités de ce nombre est un multiple de 2, 5 ou 10 :
128 est un multiple de 2, car 8 est un multiple de 2 (mais 128 n'est un multiple ni de 5, ni de 10).

Un nombre est un multiple de 3 ou de 9 si la somme des chiffres de ce nombre est un multiple de 3 ou de 9
(et comme 9 est lui-même un multiple de 3, les multiples de 9 sont tous des multiples de 3 !)
Par exemple, 15 est un multiple de 3 (mais pas de 9), car la somme de ses chiffres est 6, qui est un multiple de trois.

Enfin, un nombre est un multiple de 4 si les deux derniers chiffres (dizaines et unités) de ce nombre forment un multiple de 4 : 312 est un multiple de 4 car 12 est un multiple de 4.

180	est un multiple de **2**	car 0 est un multiple de 2 :	$0 = 2 \times 0$	
	est un multiple de **5**	car 0 est un multiple de 5 :	$0 = 5 \times 0$	
	est un multiple de **10**	car 0 est un multiple de 10 :	$0 = 10 \times 0$	
	est un multiple de **3**	car 1+8+0 = 9	et 9 est un multiple de 3 :	$3 \times 3 = 9$
	est un multiple de **9**	car 1+8+0 = 9	et 9 est un multiple de 9 :	$9 \times 1 = 9$
	est un multiple de **4**	car 80 est un multiple de 4 :	$4 \times 20 = 80$	
Ou encore :	**2, 3, 4, 5, 9 et 10**	**sont des diviseurs de 180**	(mais ce ne sont pas les seuls !)	

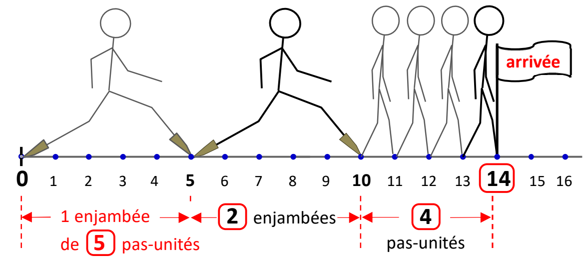
Troisième étape : deux interprétations de la **division de 14 par 5**

14 n'est pas un multiple de 5 (ou encore : 5 n'est pas un diviseur de 14), donc, contrairement à la division de 15 par 5, celle de 14 par 5 « ne tombe pas juste » : le robot aux « bottes de 5 pas » peut atteindre 10 ou 15... mais pas 14 !
Et cela vous a amené à découvrir deux approches distinctes de la division : l'une entière, l'autre décimale.

Cycle 3

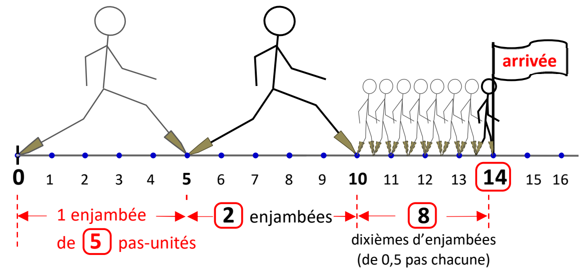
Dans une <u>division entière</u> (ou « **<u>division euclidienne</u>** »), il est interdit au robot de fractionner ses enjambées :
Sans le dépasser, il s'approche aussi près que possible du but - ici, le point « marqué 14 » - par un nombre **entier** d'enjambées, puis il reprend le « mode unité » pour terminer le trajet.
(N'utilisant que des nombres entiers de pas, il ne peut atteindre que des points marqués par des nombres entiers)

14 = **2 enjambées-de-5-pas + 4 pas-unités**



Dans une <u>division décimale</u>, en revanche, le robot est autorisé à fractionner ses enjambées en fractions décimales : en dixièmes, en centièmes *<u>d'enjambées</u>* (comme nous l'avions déjà vu faire pour une multiplication par un nombre décimal, il fonctionne alors en mode « ***réalité virtuelle*** »). Il peut donc éventuellement atteindre, ou tout au moins approcher d'aussi près que vous le désirez n'importe quel point de la demi-droite !
Ici, après 2 enjambées, il se trouve trop près du but pour une troisième enjambée. Il fractionne donc ses enjambées en dixièmes d'enjambées (donc en « 0,5 pas »), et atteint le but au bout de 8 de ces dixièmes d'enjambées.

14 = **2,8 enjambées-de-5-pas**



<u>Quatrième étape</u> : pose de la division entière de **378 par 12**

dividende	diviseur
zone des calculs (et <u>**reste**</u>)	**quotient**

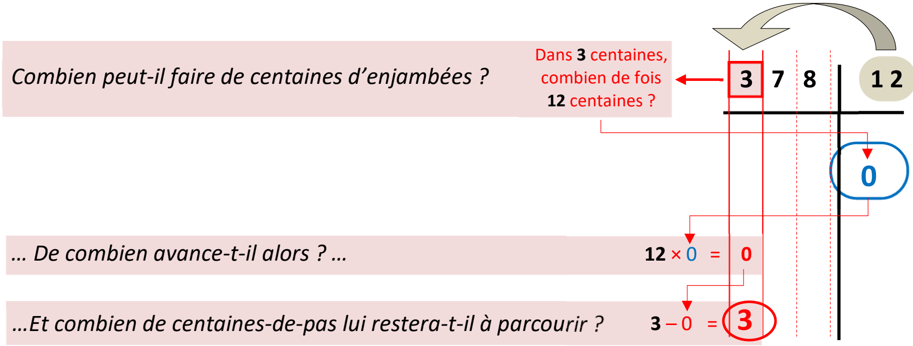
Vous avez appris à utiliser un algorithme qui s'applique à chaque colonne du dividende, et à le présenter en quatre zones :

Et peut-être avez-vous remarqué que,
contrairement aux algorithmes de l'addition de la soustraction et la multiplication
(que vous décaliez, colonne par colonne, de la colonne le plus à droite à la colonne le plus à gauche)
ce nouvel algorithme procède de la colonne le plus à gauche (du dividende) à sa colonne le plus à droite !

Cycle 3

L'algorithme, **appliqué aux centaines**…

un robot est programmé pour avancer par **centaines d'enjambées de 12 pas-unités** chacune
(donc par bonds de 1200 pas : **12 centaines** de pas).
Il part de l'origine d'une demi-droite graduée pour approcher - sans le dépasser - le point « marqué 300 » (**3 centaines**).

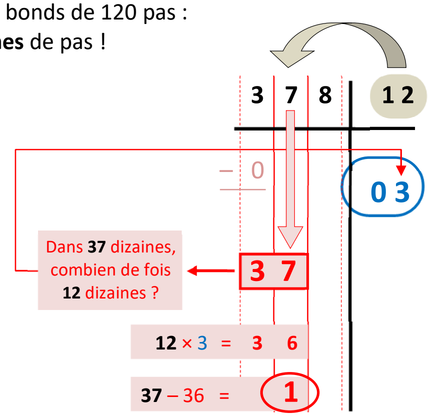


Le robot avance de ***0 centaine d'enjambée (de 12 pas)***

Il lui reste donc toujours ***3 centaines-de-pas*** *à parcourir – qu'il va convertir en 30 dizaines-de-pas !*

…Puis l'algorithme, **appliqué aux dizaines**…

Ici, le robot avance par **dizaines d'enjambées** de 12 pas-unités,
donc par bonds de 120 pas :
12 dizaines de pas !

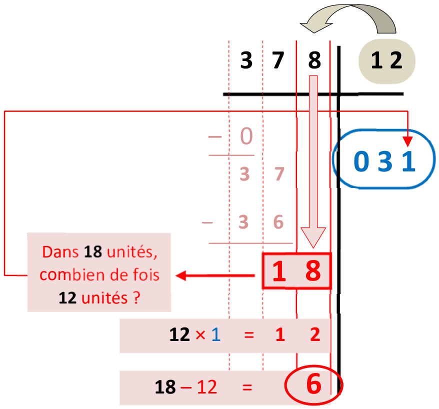


Le robot avance de ***3 dizaines d'enjambées (de 12 pas)…***

Et il lui reste ***1 dizaine-de pas*** *– qu'il va convertir en 10 pas-unités !*

… Et l'algorithme, **appliqué aux unités**.

Maintenant, le robot avance par **enjambées de 12 pas-unités :**



Le robot avance maintenant de ***1 enjambée (de 12 pas-unités)…***

Il ne lui restera plus finalement que ***6 pas-unités*** *à parcourir !*

Cycle 3

De l'autre côté de l'origine

Une extension des ensembles de nombres que vous connaissez, ainsi que des opérations et relations qui s'y rapportent.

Les nombres relatifs

Reprenons quelques lignes de notre introduction des nombres au cycle 3 :

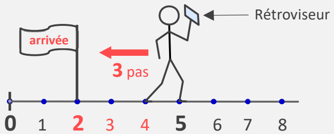
Les nombres

Au début était une demi-droite :
une sorte de route à une dimension, sur laquelle un robot-marcheur en deux dimensions (tout plat) avance d'un pas parfaitement régulier.
Les ***entiers naturels*** sont les nombres qui permettent de compter ses pas. Ce sont les premiers nombres et, il y a bien longtemps, ils servaient à compter des objets, ou des personnes, ou des moutons... En leur associant des cailloux : c'est l'origine du mot « calcul » (calculus, en latin : petite pierre).
… … …
Mais les entiers naturels n'ont pas seulement permis de compter les pas :
ils ont également permis de les marquer. Comme ceci :

Et cette remarque nous a permis d'introduire la notion de « demi-droite graduée » ! … … …

Ajoutons à ces lignes deux courts passages portant sur la soustraction :

« Soustraire trois à cinq » correspondait donc à :



se placer sur le point « marqué » 5
puis **reculer** de trois pas-unités (**soustraire** 3)
afficher la « marque » de sa position.

Une fois un nombre choisi, vous ne pouviez pas lui soustraire un nombre plus grand que lui (suivant la façon dont il serait programmé, le robot-marcheur s'arrêterait à l'origine ou tomberait en arrière, ou peut-être exécuterait les mouvements du recul - mais sans pouvoir reculer !)

Enfin, avant de poursuivre, rappelons que si l'illustration de la soustraction portait sur des nombres entiers, ce n'était que pour simplifier les calculs et les dessins : nous avions déjà appris à régler les pas du robot en fractions d'unité lorsque cela nous convenait (y compris en fractions décimales).
Pour les mêmes raisons (calculs plus simples, dessins plus clairs), nous continuerons à nous contenter dans la suite de cette étude - et en particulier lors d'une définition « de cycle 4 » de la soustraction - d'illustrations portant sur des nombres entiers... mais nos observations resteront applicables aux nombres décimaux et aux fractions !

Et maintenant, posons-nous une question : dans la soustraction, qu'est-ce qui « bloque » le robot ?

La réponse est, évidemment : l'origine de la demi-droite.

Mais cette réponse entraîne une autre question : pourquoi nous limiter à une ***demi***-droite ?
Ou, formulée autrement : pourquoi interdire à notre robot-marcheur l'accès au reste de la droite ?

Parce que nous ne savons pas associer de nombres aux points de la demi-droite « interdite » !

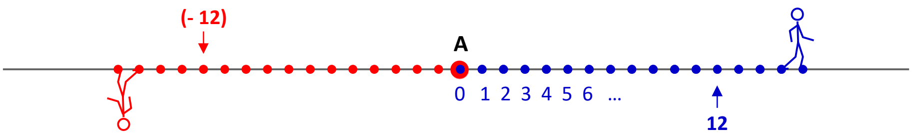
Cela ne peut-il pas s'arranger ?
Décaler très loin vers « l'arrière » l'origine de la demi-droite graduée n'est pas une solution satisfaisante : aussi loin qu'on décide de décaler cette origine, elle continue à séparer la droite en deux demi-droites, l'une graduée, l'autre pas.

Notre problème est donc de réussir à graduer la deuxième demi-droite, alors que tous les nombres que nous connaissons servent déjà à graduer la première !

Notre solution sera de faire apparaître de nouveaux nombres, en nous appuyant sur un lien très fort entre les deux demi-droites : elles sont symétriques (au sens de la symétrie centrale) par rapport au point que nous avons choisi comme « point origine ».

Il nous suffit alors d'observer qu'à chaque point atteint par notre robot sur la demi-droite graduée correspond sur l'autre demi-droite un point qui lui est symétrique par rapport au point origine...

… un point atteint par un robot symétrique du premier :



Dans la symétrie de centre **A** (le point origine de la demi-droite graduée du cycle 3), les points qui sont à la gauche de A sont les images de points qui sont à sa droite.

Comment « marquer » les points de la (nouvelle) demi-droite ?
Il n'y a que 3 siècles que les mathématiciens ont commencé à écrire « **(-12)** » et à lire « **moins 12** » la marque du symétrique du point marqué 12... et moins de deux siècles qu'ils lui donnent vraiment un rôle de nombre !

(Puisque ces points existaient, il leur a bien fallu accepter l'existence de symboles qui les marquaient... Puis trouver à ces symboles une écriture qui les distinguait des nombres traditionnels, tout en associant clairement les marques de deux points symétriques.
Tout cela prit beaucoup de temps : les premières traces d'une réflexion sur leur existence remontent à plus de 20 siècles, leur écriture à environ trois siècles... mais curieusement, leur acceptation en tant que « vrais » nombres n'est venue qu'un siècle plus tard)

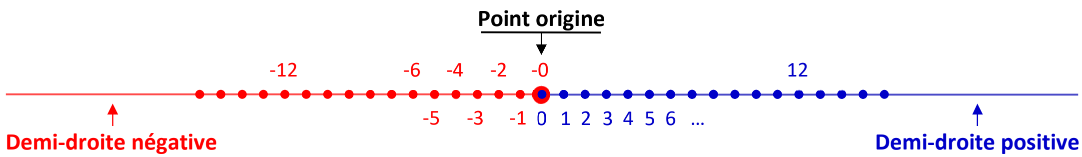
Ainsi sont apparus de nouveaux nombres pour marquer les pas sur le chemin de la deuxième demi-droite
- nous devrions dire « sous » le chemin... et espérer que ça ne dérange pas le deuxième robot de marcher la tête en bas !

Ainsi également est apparu un vocabulaire associé à la notion de droite graduée :

Graduation (ou droite graduée) :

Choisissez deux points d'une droite. Associez à l'un des deux points le nombre 0, et à l'autre, le nombre 1. Vous définissez ainsi ce qu'on appelle une graduation : dans cette graduation, à chaque point de la droite correspond un nombre unique, qu'on a décidé d'appeler « **abscisse** » de ce point.

Abscissa : coupée, en latin (le nombre qui correspond à l'endroit où vous coupez la droite).



Les mathématiciens ont convenu d'autoriser les écritures «-1 », «-2 », «-3 » à la place de «(-1) », «(-2) », «(-3) », *etc.* lorsque ces écritures sont soit isolées, soit en début de ligne, et ne risquent donc pas de porter à confusion.

Origine de la graduation : le point qui a comme abscisse 0 ***ou*** : le point d'abscisse 0
(et également (-0)... mais évitez de l'écrire !)

Demi-droite positive : demi-droite qui part de l'origine de la graduation et qui contient le point d'abscisse 1

Demi-droite négative : demi-droite qui part de l'origine de la graduation et qui contient le point d'abscisse (-1)

Nombres positifs : les abscisses des points de la demi-droite positive

Nombres négatifs : les abscisses des points de la demi-droite négative

Les deux demi-droites ont la même origine, donc 0 est bien à la fois positif et négatif !

Pourquoi « positifs » ou « négatifs » ? Ces adjectifs existaient bien avant d'être associés à des nombres, et « négatif » caractérisait habituellement une attitude, une situation, un objet qu'il était préférable d'éviter - à l'opposé de « positif ». En termes de finances, en particulier, une dette était considérée comme une quantité négative (on s'appauvrissait) et un gain comme une quantité positive (on s'enrichissait).

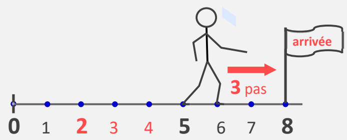
Niveau 1

Une première famille d'opérations : l'addition et la soustraction

L'addition

Au cycle 3, nous avions défini l'addition comme une succession d'actions du robot-marcheur :

Ainsi, pour le robot, « ajouter trois à cinq » correspond à :



se placer sur le point « marqué » 5
puis **avancer** de trois pas-unités (**ajouter** 3)
afficher la « marque » de sa position.

Mais que signifierait, pour ce robot, **ajouter « *moins trois* » à cinq** ?
Un robot « du cycle 3 » n'est pas assez évolué pour faire face à cette situation : il ne dispose ni d'un programme qui lui permette d'interpréter « moins trois », ni d'un module physique qui lui permettrait d'agir correctement, s'il savait l'interpréter !

Nous allons donc maintenant faire appel à un robot modernisé, adapté au cycle 4.
Conçu à partir du « robot du cycle 3 », il est doté de deux nouvelles fonctionnalités :

d'une part***, il reconnaît toutes les écritures*** de nombres relatifs, qu'il interprète comme des nombres définis par deux éléments - un « signe » (positif ou négatif) et une « valeur absolue » (pour lui : un nombre du cycle 3).

D'autre part*, **il peut pivoter sur lui-même*** pour adapter sa position au signe du nombre :
il se tourne vers « l'horizon positif » quand il doit traiter un nombre positif (comme au cycle 3),
et il se tourne vers « l'horizon négatif » quand il doit traiter un nombre négatif.

Pour simplifier les déplacements de notre nouveau robot, il gardera constamment la tête « en l'air » !
Pour faciliter la compréhension des dessins, il a un œil à l'avant de la tête, une antenne à l'arrière,
le côté qu'il nous montre lorsqu'il est tourné vers l'horizon positif est bleu,
et celui qu'il nous montre lorsqu'il est tourné vers l'horizon négatif est rouge.

Ces deux améliorations nous permettent de définir une « addition relative » **(étendue à tous les nombres relatifs) :**

Le robot

1) ***se place sur le point dont l'abscisse est le premier nombre,***
2) ***se tourne*** $\begin{cases}\text{vers « l'horizon positif » si le deuxième nombre est positif,} \\ \text{vers « l'horizon négatif » s'il est négatif,}\end{cases}$
3) ***avance de la valeur absolue de ce deuxième nombre.***

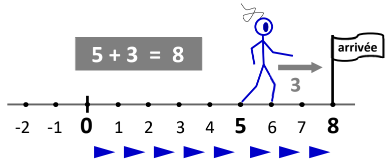
La somme des deux nombres est l'abscisse du point qu'il atteint.

Entre deux nombres positifs :

tout semble se passer comme au cycle 3

(« semble », parce qu'en réalité, le robot analyse bien ces nombres comme des nombres à deux éléments, et agit en conséquence) :

cette nouvelle opération
est donc bien une extension de l'addition du cycle 3.

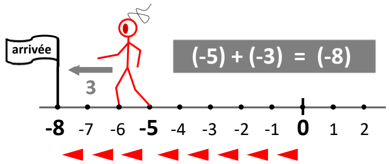


À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon positif**, avance de 5 pas, pour « atteindre le point d'abscisse 5 », puis, **toujours tourné vers l'horizon positif**, avance de 3 pas, pour « ajouter 3 ».

Entre deux nombres négatifs :

nous retrouvons une situation proche de la précédente...
mais avec des déplacements vers l'horizon négatif

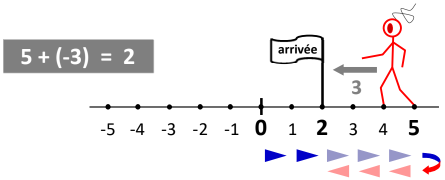
(tout se passe comme si nous utilisions encore l'addition du cycle 3, en nous appuyant sur une demi-droite graduée dirigée vers la gauche) !



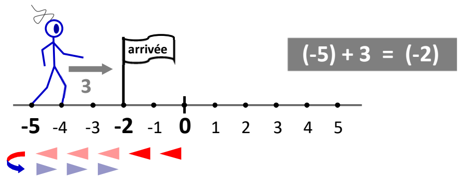
À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon négatif**, avance de 5 pas, pour « atteindre le point d'abscisse (-5) », puis, **toujours tourné vers l'horizon négatif**, avance de 3 pas, pour « ajouter (-3) ».

Et si l'un des nombres est positif et l'autre négatif :

ou bien le robot donne l'impression d'avoir été trop loin et de devoir revenir sur ses pas...

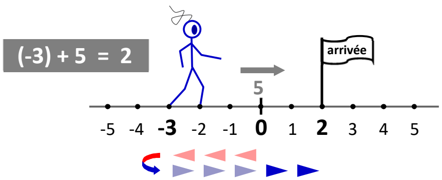


À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon positif**, avance de 5 pas, pour « atteindre le point d'abscisse 5 », puis **se tourne vers l'horizon négatif** et avance de 3 pas pour « ajouter (-3) ».

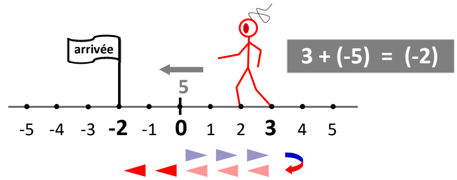


À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon négatif**, avance de 5 pas, pour « atteindre le point d'abscisse (-5) », puis **se tourne vers l'horizon positif** et avance de 3 pas pour « ajouter 3 ».

... ou bien il donne l'impression d'être parti dans le mauvais sens - et là encore, de devoir revenir sur ses pas :



À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon négatif**, avance de 3 pas, pour « atteindre le point d'abscisse (-3) », puis **se tourne vers l'horizon positif** et avance de 5 pas pour « ajouter 5 ».



À partir de l'origine, le robot, **tourné vers l'horizon positif**, avance de 3 pas, pour « atteindre le point d'abscisse 3 », puis **se tourne vers l'horizon négatif** et avance de 5 pas pour « ajouter (-5) ».

(Dans les 4 cas, après plusieurs pas inutiles, le robot se retrouve finalement à 2 pas de l'origine !)

Pourquoi dans chacun de ces 4 cas la valeur absolue de la somme est-elle 2 ?

Parce qu'à chaque fois, les « pas en rouge » viennent à contresens des « pas en bleu » !

Lorsque les « pas en bleu » sont les plus nombreux, ils sont en partie grignotés par les « pas en rouge », et seuls certains d'entre eux contribuent à la position finale du robot :

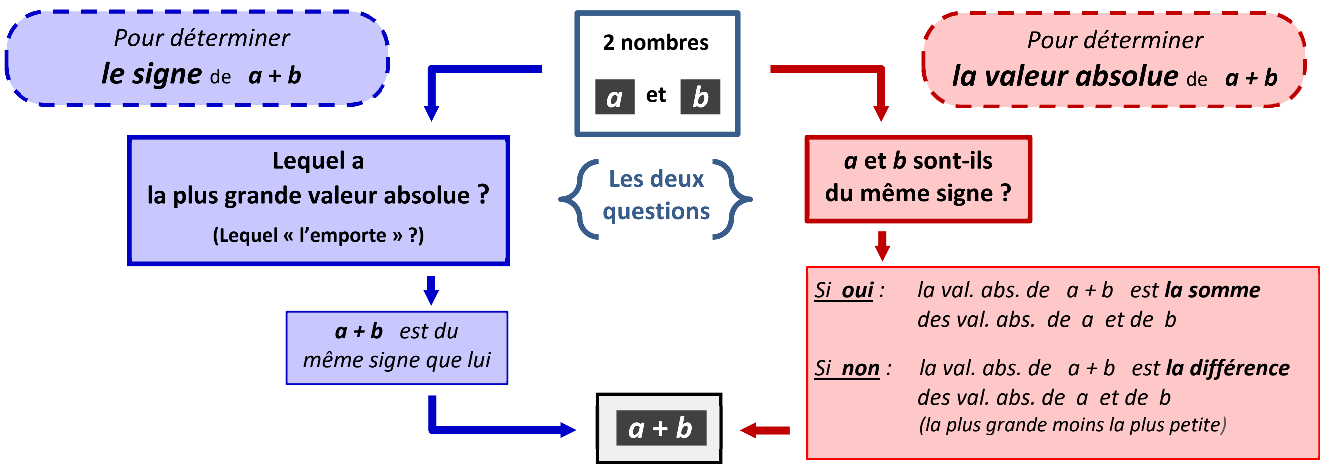
chaque « pas en rouge », allant à contresens, « efface » un « pas en bleu » : les « pas en bleu » utiles représentent donc la différence entre le nombre initial de « pas en bleu » et celui de « pas en rouge »… donc la différence - au sens du cycle 3 - entre la valeur absolue du nombre positif (« bleu ») et celle du nombre négatif (« rouge »).

Naturellement, si ce sont les « pas en rouge » qui sont les plus nombreux, nous pouvons encore raisonner de la même façon - mais nous devons alors calculer la différence entre la valeur absolue du nombre négatif (« rouge ») et celle du nombre positif (« bleu ») : nous constatons bien que, quelle que soit la situation, la valeur absolue de la somme est la différence entre la plus grande des deux valeurs absolues et la plus petite - c'est-à-dire, ici, 5 – 3... donc 2 !

Quant au signe de la somme, il ne peut être que celui du nombre qui a la plus grande valeur absolue :
si l'autre nombre est du même signe, le robot s'éloignera encore davantage de l'origine... et sinon, il s'en rapprochera - mais sans la traverser !

En pratique, le <u>calcul</u> d'une addition relative repose sur **deux questions** :

Un algorithme mathématique de l'addition…

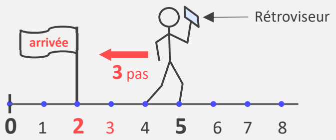


Étrangement, la question sur les signes déterminera la valeur absolue de la somme, et la question sur les valeurs absolues déterminera son signe !

La soustraction

Au cycle 3, nous avions encore défini la soustraction par une succession d'actions du robot-marcheur :

« Soustraire trois à cinq » correspondait donc à :



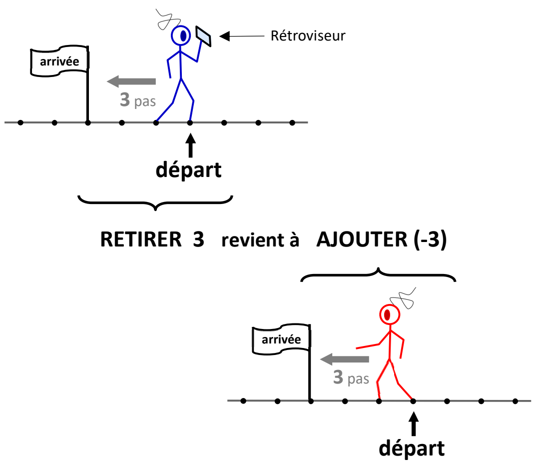
se placer sur le point « marqué » 5
puis **reculer** de trois pas-unités (**soustraire** 3)
afficher la « marque » de sa position.

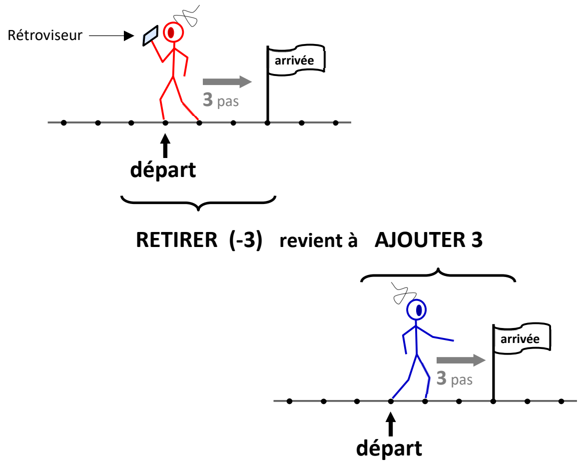
Et naturellement, le robot ne pouvait pas reculer plus loin que l'origine.

Mais nous disposons maintenant de la droite entière... et d'un robot bien plus performant. Nous pourrions donc sans difficulté définir la soustraction relative de la même façon que nous avons défini l'addition relative : comme pour l'addition, le robot commencerait par se tourner vers l'horizon positif pour retirer un nombre positif et vers l'horizon négatif pour retirer un nombre négatif... mais ensuite, il reculerait au lieu d'avancer !

Toutefois, cela nous contraindrait non seulement à créer un algorithme de calcul plus complexe que celui de l'addition, mais également - plus tard - à devoir constamment faire face aux imperfections de la soustraction (et elles sont importantes : entre autres, la soustraction n'est ni commutative, ni associative).

Alors, nous allons nous y prendre autrement, en observant que pour le robot, reculer - depuis n'importe quel point - a exactement les mêmes conséquences que faire un demi-tour, puis avancer (si ce n'est qu'à l'arrivée, il ne sera plus tourné dans le même sens) :





D'où la définition que nous choisirons pour la soustraction relative :

soustraire un nombre (à un autre), c'est **ajouter son opposé** (à l'autre nombre).

5 **– 3** = 5 **+ (-3)**   5 **– (-3)** = 5 **+ 3**   -5 **– 3** = -5 **+ (-3)**   -5 **– (-3)** = -5 **+ 3**

(*Qu'il soit positif ou négatif,* <u>*le premier nombre ne change pas*</u> : il correspond au point d'où part le robot !)

<u>La force des soustractions relatives est</u> - évidemment, et contrairement à celles du cycle 3 - <u>de ne jamais être impossibles</u>. Cependant, à l'exception de situations très simples (une soustraction possible au cycle 3 : « 5 – 3 », ou lorsque nous « déléguons » le travail à une calculatrice ou à un ordinateur), nous éviterons de les calculer directement : nous utiliserons leur définition pour les convertir en additions, comme dans les exemples ci-dessus, puis nous calculerons ces additions.

Attention ! ***Lorsque ça n'apporte rien, évitez d'écrire*** « 5 **+ (-3)** » : « 5 **– 3** » *exprime le même nombre, plus lisiblement !!!*

Enchaînement d'additions et de soustractions (avec ou sans parenthèses)

Attention : ce paragraphe ne traite que de lignes de calcul <u>exclusivement</u> composées d'additions et de soustractions.

Niveau 1

Sans parenthèses

Pour calculer une succession d'additions et de soustractions, vous pouvez évidemment décider de conserver les soustractions : la soustraction n'étant ni commutative, ni associative, il vous faudra alors respecter la 2ème règle de calcul (de gauche à droite)… mais il est souvent préférable de les convertir en additions, ce qui vous permet d'opérer dans l'ordre qui vous convient le mieux :

$a = -5 \;\mathbf{-\; 4} + 11 + (-17) \;\mathbf{-\;(-9)} + 6$

devient : $a = -5 \mathbf{+ (-4)} + 11 + (-17) \mathbf{+\; 9} + 6$ que vous pouvez écrire : $a = \underbrace{-5 + (-4) + 9} + \underbrace{(-17) + 11 + 6}$

$a = 0 + 0$

$a = 0$

Avec parenthèses

Là encore, vous pouvez décider de conserver les parenthèses - et vous devrez évidemment les calculer en premier. Mais vous pouvez également choisir de vous en affranchir, de les « faire disparaître ». Comment ? Tout dépend de la situation : la ligne enfermée par ces parenthèses est-elle ajoutée, ou soustraite ? Ou encore : ces parenthèses sont-elles précédées d'un « + » ou d'un « – » ?

Une deuxième famille d'opérations : la multiplication et la division

La multiplication

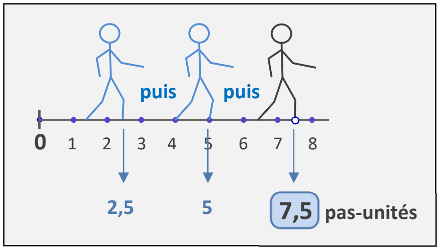
Pour mieux cerner l'extension de la multiplication aux nombres relatifs, nous l'observerons sous trois angles : une interprétation numérique, une programmation robotique... et enfin une construction mathématique !

Une interprétation numérique de la multiplication de (-2,5) par 3

Il nous suffit de nous appuyer sur l'addition pour étendre nos observations du cycle 3 à la partie négative de la droite graduée.

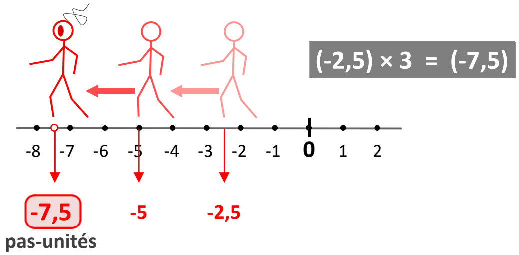
Notre définition du cycle 3 :

2,5 × 3 = 2,5 + 2,5 + 2,5



Et son extension :

(-2,5) × 3 = (-2,5) + (-2,5) + (-2,5)



Toutefois, si cette interprétation est suffisante pour déterminer (-2,5) × 3 , elle ne nous permet ni de déterminer 3 × (-2,5) (sans pré-supposer la commutativité de la multiplication relative), ni d'étendre cette multiplication au produit de deux nombres négatifs ! Une vision robotique s'y prêtera-t-elle mieux ?

Programmation d'un robot pour une multiplication étendue aux nombres relatifs :

Le robot est placé sur l'origine.

Sans quitter l'origine, il se tourne vers le point dont l'abscisse est le premier nombre, et « va chercher » ce point *(pied arrière sur l'origine, pied avant sur le point dont l'abscisse est le premier nombre)* ***: il détermine ainsi ses enjambées.***

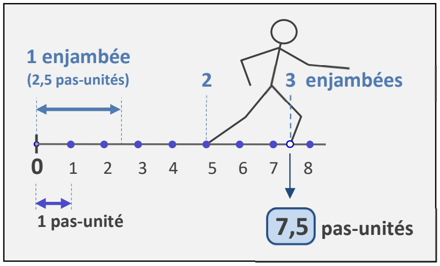
Toujours sans quitter l'origine : si le deuxième nombre est négatif, le robot fait un demi-tour.

Enfin, il avance du nombre d'enjambées donné par la valeur absolue de ce deuxième nombre.

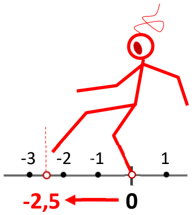
Le produit des deux nombres est l'abscisse du point qu'il atteint.

Première application : ***multiplication de (-2,5) par 3***

Notre vision du cycle 3 : 2,5 × 3 = 7,5



Et son extension : **(-2,5) × 3 = (-7,5)**

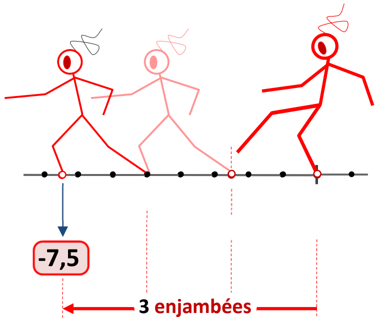


1^er^ nombre :
(sens initial et enjambée)

(-2,5) est négatif :

depuis l'origine,
le robot se tourne
vers « l'horizon négatif »
puis il règle ses enjambées à 2,5 pas

puis



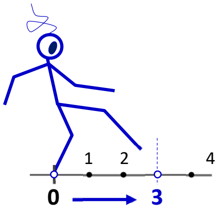
2^ème^ nombre :
(sens final et nombre d'enjambées)

3 est positif : pas de changement de sens

Sa valeur absolue est 3 :
le robot avance de 3 enjambées

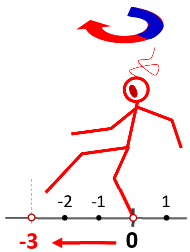
Avec cette programmation du robot, nous trouvons bien le même résultat qu'en nous appuyant sur l'addition.
Qu'arrive-t-il si maintenant, nous l'appliquons au calcul de 3 × (-2,5) ou de (-3) × (-2,5) ?

Deuxième application : ***multiplication de 3 par (-2,5)***



1^er^ nombre :
Sens positif
et enjambée de 3 pas

3

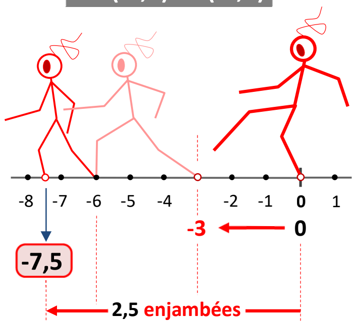


2^ème^ nombre :
Il est négatif,
donc demi-tour

-2,5

puis

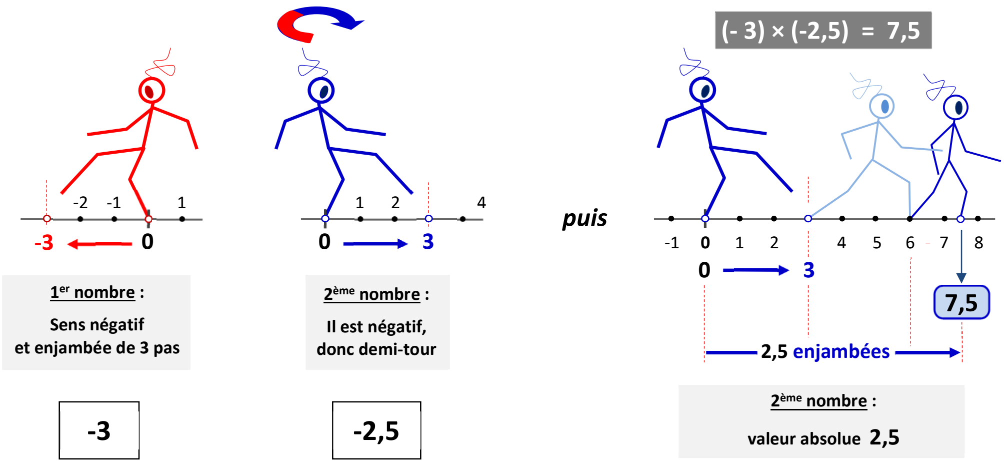
3 × (-2,5) = (-7,5)



2^ème^ nombre :
valeur absolue 2,5

Le robot avance de 2,5 enjambées

Dernière application : multiplication de (-3) par (-2,5)



Le robot avance de 2,5 enjambées

Les trois applications précédentes nous montrent que cette multiplication étendue s'applique à tous les nombres relatifs (il s'agit bien d'une extension de la multiplication du cycle 3 : si nous l'appliquons à deux nombres positifs, nous retrouvons exactement la situation du cycle 3).

Par ailleurs, les deux premières applications de cette extension de la multiplication permettent de penser que, comme la multiplication du cycle 3, elle est commutative : (-2,5) × 3 = 3 × (-2,5).
Toutefois, nous ne pouvons encore que l'espérer : un exemple ne prouve rien !

Pour disposer avec certitude d'une extension parfaite de la multiplication du cycle 3 - c'est-à-dire d'une extension qui en conserve toutes les propriétés qui nous paraissent importantes, nous allons maintenant *construire* cette extension, en partant uniquement de la multiplication du cycle 3 de ses propriétés.

Nous constaterons alors que, si la mise en place de cette multiplication étendue demande quelques efforts, son utilisation, en revanche, est bien plus simple que celle de l'addition !

Une construction mathématique de l'extension aux nombres relatifs de la multiplication du cycle 3

Le « cahier des charges » de notre extension sera simple.

Différents partages d'un segment-unité

Une observation approfondie de la droite

Soulignées ou non, toutes les lignes sont « cliquables »

Table générale des matières

Différents partages d'un segment-unité

Les nombres rationnels

Pourquoi de nouveaux nombres ?

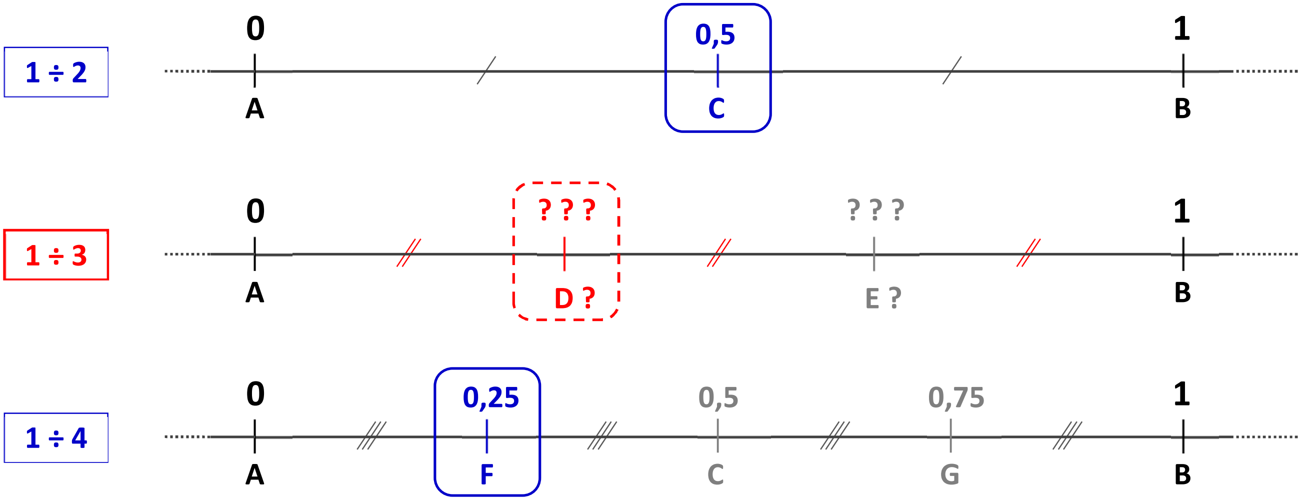
Nous avons longuement étudié les nombres décimaux relatifs, et les opérations associées.
L'apparition des nombres négatifs a permis de combler une grande lacune des nombres du cycle 3 :
entre nombres relatifs, *toutes les soustractions sont « possibles »*.

Que signifie « sont possibles » ?

Dès le cycle 3, nous avions décidé d'appeler « nombre » l'abscisse de tout point d'une droite graduée :
dire que toutes les soustractions sont possibles, c'est donc dire que, quelle que soit la soustraction envisagée, nous pourrons déterminer un point qui aura comme abscisse le résultat de cette soustraction.

Mais il reste *une autre* lacune aux nombres décimaux relatifs : *les divisions n'y sont pas toutes possibles* !

Des divisions entre nombres entiers (qui sont des décimaux particuliers) suffisent à le mettre en évidence.
Observez par exemple les divisions de 1 par 2, 3 ou 4 ... et leur interprétation sur une droite graduée,
en rappelant qu'ici diviser par 2, 3 ou 4, c'est séparer [AB] en 2, 3 ou 4 segments de même longueur :



Niveau 1

Les divisions de 1 par 2 ou par 4 sont devenues possibles pour nous dès que nous avons appris à utiliser l'algorithme de la division entre nombres décimaux, parce que dans ces deux cas, l'algorithme aboutissait à un résultat : une calculatrice construite pour fonctionner avec des nombres décimaux affichera 0,5 si nous entrons « 1 ÷ 2 » et 0,25 si nous entrons « 1 ÷ 4 » !

Nous pouvons alors, à l'aide d'une règle graduée décimale suffisamment précise, déterminer les points C et F - donc séparer *exactement* [AB] en segments de même longueur (une fois F déterminé, C et G suivent facilement).

Mais que pensez-vous de la division de 1 par 3 ?

Appelons D et E - s'ils existent ! - les points qui séparent [AB] en 3 segments de même longueur.

Le quotient de la division décimale de 1 par 3 commence par « 0,3 » et se continue par des « 3 », mais quel que soit le nombre de « 3 » après la virgule :

tout nombre décimal qui s'écrit 0,333…33**3** est l'abscisse d'un point situé « avant » D,

tout nombre décimal qui s'écrit 0,333…33**4** est l'abscisse d'un point situé « après » D.

Une calculatrice construite pour fonctionner avec des nombres décimaux ne peut donc rien afficher si nous entrons « 1 ÷ 3 » : ***il est impossible d'attribuer une abscisse décimale à D*** !

On peut imaginer deux raisons à cette situation :

ou bien il est possible de séparer le segment [AB] en trois segments qui ont *exactement* la même longueur... alors D existe - mais son abscisse n'est pas un nombre *décimal*.

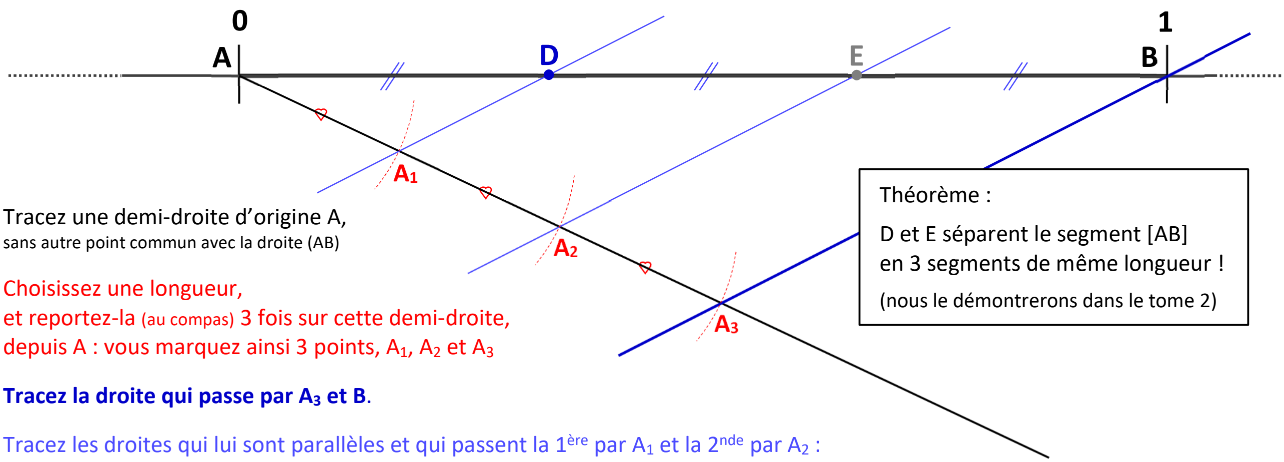
Ou bien cette séparation en trois n'est pas possible, alors D n'existe pas !

Cette seconde raison est loin d'être loufoque : comment affirmer qu'une séparation est possible, si vous ne connaissez qu'une seule technique de séparation - centrée sur des instruments à graduations décimales - et si cette technique n'aboutit pas ?

Niveau 3

Heureusement, les mathématiciens ont découvert une autre technique de séparation : au lieu d'essayer de repérer D par des règles graduées, ils ont démontré qu'on pouvait l'atteindre par une construction !
Nous ne justifierons pas cette construction ici, mais nous l'étudierons en détail dans la partie géométrie du tome 2 de cet ouvrage : elle est à l'origine de l'un des théorèmes les plus célèbres du collège !

En voici les étapes sucessives (un algorithme de géométrie !) Sans justifications :



Tracez une demi-droite d'origine A,
sans autre point commun avec la droite (AB)

Choisissez une longueur,
et reportez-la (au compas) 3 fois sur cette demi-droite,
depuis A : vous marquez ainsi 3 points, A_1, A_2 et A_3

Tracez la droite qui passe par A_3 et B.

Tracez les droites qui lui sont parallèles et qui passent la 1ère par A_1 et la 2nde par A_2 :
elles coupent [AB], la 1ère en **D** et la 2nde en **E.**

Théorème :

D et E séparent le segment [AB]
en 3 segments de même longueur !

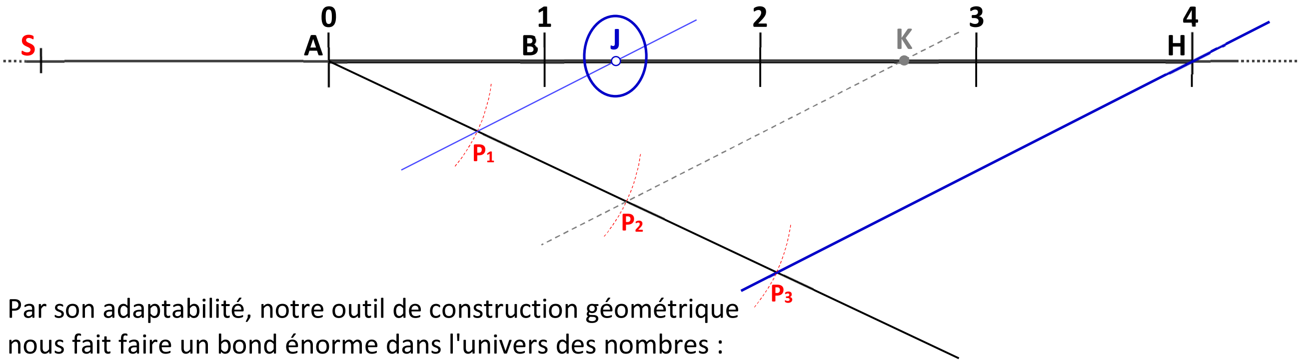
(nous le démontrerons dans le tome 2)

D'après le théorème (que nous admettons) D existe donc, et puisque son abscisse ne peut pas être décimale, nous venons de mettre en évidence une nouvelle sorte de nombre (pour laquelle nous n'avons pas encore d'écriture) !

Et en y réfléchissant, nous constatons que ce n'est pas un nouveau nombre que nous avons mis en évidence, mais *tout un ensemble de nouveaux nombres* : des nombres qui sont les résultats *exacts* des divisions de n'importe quel entier (relatif) par - presque - n'importe quel autre entier relatif.

« Presque », parce que nous ne savons pas séparer un segment en *zéro* segment : la division par 0 continue à ne pas avoir de sens !

Pourquoi affirmer que nous avons mis en évidence tout un ensemble de nombres ?
Parce que la construction précédente peut être adaptée à n'importe quelle division d'un entier par un entier non nul. Voici par exemple la construction du point qui a comme abscisse le résultat de la division de 4 par 3 :



Par son adaptabilité, notre outil de construction géométrique nous fait faire un bond énorme dans l'univers des nombres :

nous avons maintenant la certitude que ***toutes les divisions d'un entier par un entier (non nul) sont possibles.***

Niveau 2

Niveau 2

Cette observation est à l'origine de nombreuses réflexions mathématiques, et les mathématiciens ont décidé de donner un nom commun à tous ces nombres obtenus en divisant un entier par un autre :
ils les ont appelé des « **nombres rationnels** ».

(En français, « rationner des vivres », c'est en séparer la quantité totale en la divisant, par exemple, par un nombre de jours.)

Nous connaissons déjà certains de ces nombres rationnels : les nombres entiers et les nombres décimaux !

> Les nombres entiers, parce que 18, par exemple, peut être considéré comme le résultat de la division de 18 par 1, mais également de 36 par 2, de (-18) par (-1), ou de 1314 par 73, *etc*.
>
> Et les nombres décimaux parce que 5,32 peut être considéré comme le résultat de la division de 532 par 100, et (-5,32) comme celui de la division de 532 par (-100), ou de (-532) par 100, ou de (-5320) par 1000, *etc*.

Il nous reste à nous familiariser avec les autres, ceux que nous venons de découvrir, et tout d'abord à inventer une écriture (et une lecture) qui nous permettra de les exprimer. Cette écriture, bien entendu, est celle des ***fractions***, et vous la connaissez déjà, mais nous allons en préciser les particularités. Puis vous apprendrez à l'utiliser dans des opérations ou des lignes de calcul, aussi couramment que les nombres décimaux.

Niveau 1

Les fractions

Écriture et définition numérique

Une fraction est un nombre relatif.

Qu'une fraction soit positive ou négative, son écriture est composée de deux nombres entiers ***positifs*** superposés - son *numérateur* et son *dénominateur (qui ne peut pas être nul !)* - séparés par une barre horizontale, l'ensemble étant précédé par le symbole « - » d'opposition lorsque la fraction est négative.

Appelons donc *n* (pour ***n***umérateur) et *d* (pour ***d***énominateur) deux nombres ***entiers positifs*** - *d* étant différent de 0 :

$\dfrac{n}{d}$ **est le résultat exact de la division de *n* par *d***
Il s'agit d'un nombre positif !

$\left(-\dfrac{n}{d}\right)$ **est le nombre opposé à** $\dfrac{n}{d}$
Il s'agit d'un nombre négatif !

Nous vérifierons, après avoir étendu la multiplication aux fractions, que $\dfrac{n}{d}\times d = n$ *et* $\left(-\dfrac{n}{d}\right)\times d = (-n)$

Méfiez-vous des « contrefractions » !

Les seules fractions « authentiques » ont pour numérateur et pour dénominateur
des nombres ***entiers positifs***, donc aucune des écritures suivantes n'est celle d'une fraction :

$$\frac{(-4)}{3} \qquad \frac{4}{(-3)} \qquad \frac{(-4)}{(-3)} \qquad \frac{2}{1,5} \qquad \frac{4,5}{8} \qquad \frac{4,5}{2,5} \qquad \frac{\pi}{1,5} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{2^3}{4}$$

Ce sont toutes des divisions (ou même, pour la dernière, une succession de 2 opérations), dont les ***résultats*** peuvent être des fractions - ceux des 6 premières et de la dernière - ou pas (ceux des 2 autres).
Les mathématiciens utilisent très fréquemment ces écritures - qu'ils appellent des « écritures fractionnaires » - parce que leur comportement, dans une ligne de calcul, est très proche de celui d'une fraction. Mais ils ne s'y trompent pas, ils savent évidemment qu'il s'agit d'opérations, pas de nombres.

Ils s'y trompent même si peu qu'ils ne les lisent pas comme des fractions :

lorsqu'ils voient $\frac{45}{8}$ (qui est une fraction), ils lisent « 45 ***huitièmes*** ».

« Huitième(s) » est ici l'équivalent d'un nom de famille : $\frac{45}{8}$ représente l'élément numéro 45 de cette famille de fractions.
Ce «… ième » final est la « signature orale » d'une fraction - avec quatre exceptions historiques : unité, demi, tiers et quart.

Mais lorsqu'ils voient $\frac{4,5}{8}$ (qui est une division), ils lisent simplement « 4,5 ***sur 8*** » !

Une interprétation géométrique…

Appelons encore n et d deux nombres entiers positifs - d étant différent de 0 :

$\boldsymbol{\frac{n}{d}}$ est l'abscisse du premier des points *de séparation* (donc *après* l'origine),
lorsqu'on sépare le segment compris entre l'origine de la graduation et le point d'abscisse n en d segments de même longueur.

Sur le dessin de la page précédente : $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ est l'abscisse du point J, premier des points de séparation du segment [AH] (compris entre l'origine A et le point H, d'abscisse 4) en 3 segments de même longueur.

$\boldsymbol{\left(-\frac{n}{d}\right)}$ est l'abscisse du symétrique du point précédent par rapport à l'origine de la graduation.

Sur le dessin de la page précédente : $\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$ - *ou* $\boldsymbol{\left(-\frac{4}{3}\right)}$ - est l'abscisse du point S, symétrique de J par rapport à A.

(Une formulation plus simple : lorsqu'on sépare un segment de longueur n en d segments tous de même longueur,
$\boldsymbol{\frac{n}{d}}$ est la longueur de chacun de ces petits segments,
mais cette formulation permet moins clairement de « situer » ce nombre.)

Niveau 1

… et deux interprétations robotiques des fractions

La première, vous la connaissez déjà : elle s'appuie sur notre première approche des fractions (dans notre *survol des acquis du cycle 3*), maintenant justifiée par la construction géométrique qui nous a prouvé que la séparation du segment unité en segments de même longueur était toujours possible.

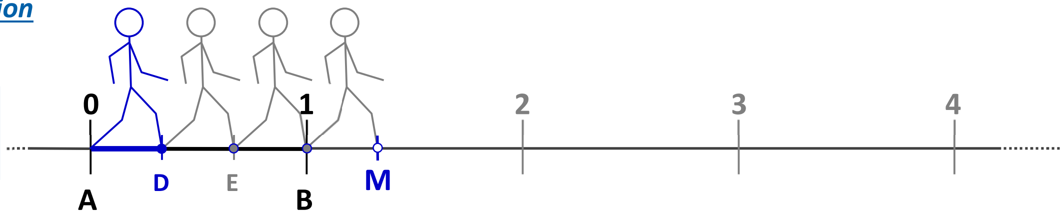
La seconde s'appuiera, elle, sur l'interprétation géométrique des fractions que nous venons de voir.

Il nous restera à prouver que dans les deux cas, le robot atteint le même point :
nous nous contenterons d'un exemple, mais vous pourrez évidemment l'appliquer à n'importe quelle fraction !

Un exemple : les déterminations par un robot-marcheur du point d'abscisse $\frac{4}{3}$

Première interprétation

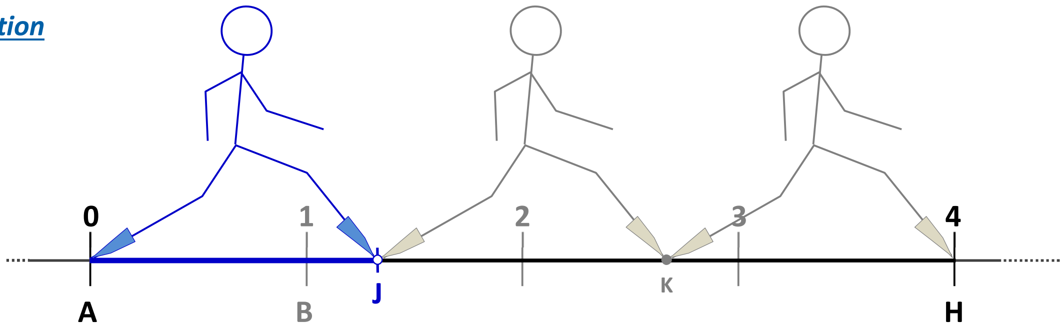
D'après la définition du cycle 3 :
$4 \times \frac{1}{3}$



Le robot-marcheur règle ses « petits-pas » à **1 tiers** de pas-unité,
puis avance vers « l'horizon positif », de **4** « petits-pas », depuis l'origine.
Il atteint alors le point M. ***(Cette interprétation reflète une multiplication.)***

Deuxième interprétation

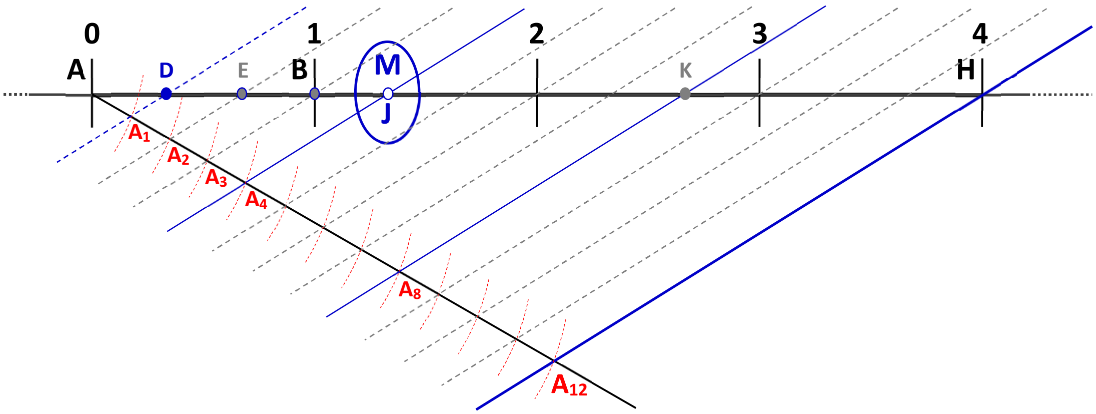
D'après la définition du cycle 4 :
$4 \div 3$



Le robot-marcheur détermine ses enjambées de façon à pouvoir atteindre le point d'abscisse **4** en exactement **3** enjambées, depuis l'origine.
Il atteint alors le point J à sa première enjambée. ***(Cette interprétation reflète une division.)***

J et M sont-ils vraiment deux noms du même point (ont-ils vraiment la même abscisse) ?

La démonstration suivante repose uniquement sur deux lectures différentes de notre outil de construction géométrique !



Reprenons notre première construction géométrique, mais reportons 12 fois la longueur que nous avons choisie.
Traçons la droite qui passe par H et A_{12}, puis les droites qui lui sont parallèles et qui passent par A_1, A_2, *etc.,* et appelons-les *droite-1*, *droite-2*, *etc*.

Observons pour l'instant uniquement les droites en traits pleins :
A_4 et A_8 séparent le segment [AA_{12}] en 3 segments de même longueur (quatre fois la longueur que nous avons choisie).
Nous retrouvons la deuxième construction géométrique, et également la deuxième interprétation robotique :
***droite-4* passe donc par J** !

Concentrons-nous maintenant sur la partie gauche du dessin :
les points A, D, E, B et M sont ceux de la première interprétation, donc le segment [BM] a la même longueur que [AD].

Les segments [AA_1] et [A_3A_4] ont la même longueur et *droite-1*, *droite-3* sont parallèles à *droite-4* donc en particulier, le segment [BJ] a la même longueur que [AD], donc **[BJ] a la même longueur que [BM]** !

B, J et M sont des points de la même droite, J et M sont du même côté de B, et [BJ] et [BM] ont la même longueur :

J et M sont donc bien deux noms du même point !

L'équivalence des deux interprétations précédentes met en évidence un début d'extension de la multiplication aux nombres rationnels :

Nous y reviendrons plus longuement dans la partie « opérations » de ce thème !

$$4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

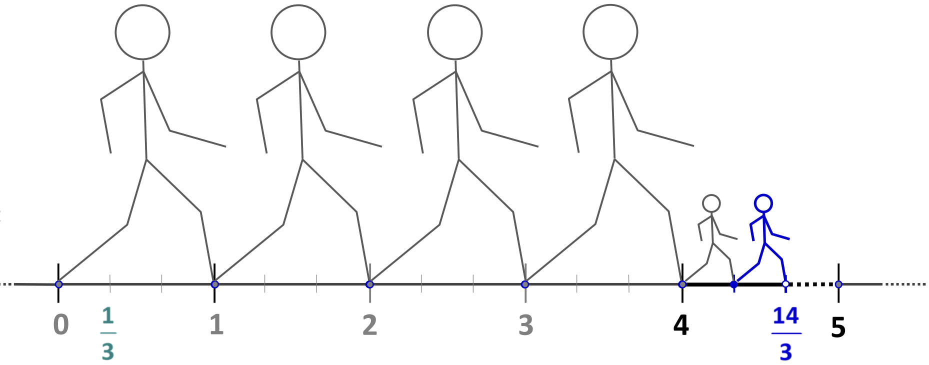
Niveau 2

Différentes écritures d'une même fraction

Là encore, nous nous contenterons d'exemples, que vous pourrez appliquer à n'importe quelle fraction !

Entier et fraction « résiduelle » : $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ ***ou*** $\frac{14}{3} = 5 - \frac{1}{3}$

Ces deux écritures permettent de marquer rapidement et précisément **le point dont l'abscisse est** $\frac{14}{3}$ **:**



vous savez naturellement placer sur une droite graduée - précisément et sans hésitations - le point d'abscisse 7,2 ou celui d'abscisse (-0,4).
Un intérêt des écritures que vous allez découvrir est de pouvoir également placer sans hésitation des points dont l'abscisse est une fraction, en déterminant deux entiers consécutifs qui encadrent cette fraction.
Le principe, ici, est de s'approcher aussi près que possible - *uniquement par des pas-unité* - du point que vous voulez atteindre, puis de compléter le trajet par des « tiers-de-pas ».

Mais comment y arriver ?

Un pas-unité équivaut à une enjambée de 3 « tiers-de-pas ». Vous retrouvez donc (appliquée à des tiers-de-pas) une division que vous aviez étudiée au cours du cycle 3 - nous l'avons reprise dans le survol des acquis du cycle 3 : la division « entière » (ou « euclidienne ») de 14 (tiers de pas) par 3 .

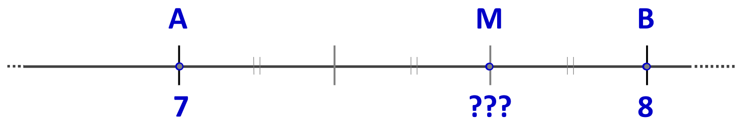
$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

14 (tiers de pas) = 4 (enjambées-de-trois-tiers-de-pas) + 2 tiers-de-pas

$$\boxed{\frac{14}{3} = 4 \text{ (unités)} + \frac{2}{3}}$$

ou encore : $\frac{14}{3}$ **est un peu plus que 4 ... mais un peu moins que 5 :** $\boxed{\frac{14}{3} = 5 - \frac{1}{3}}$

À l'envers, comme il est possible de retrouver le dividende d'une division entière à partir de son diviseur, de son quotient et de son reste, vous pouvez - sans connaître l'origine d'une graduation - retrouver l'abscisse d'un point si ce point appartient à un segment dont les extrémités ont comme abscisses deux nombres entiers consécutifs et s'il a été construit par un fractionnement déterminé de ce segment :



[AB] *a été fractionné en trois, donc nous devons « réfléchir en tiers » : l'abscisse de* A *est de 7 unités - de chacune 3 tiers - donc de 21 tiers, et* M *est à deux tiers d'unité plus loin.*

abscisse de M = $7 \times \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$

abscisse de M = $\frac{21}{3} + \frac{2}{3}$

abscisse de M = $\frac{23}{3}$

(L'application de la division euclidienne aux fractions nous incite à ajouter une fraction à un nombre entier, ou à les multiplier entre eux : nous avons donc légèrement anticipé ici sur les opérations entre fractions !)

Les très nombreuses « familles » d'une fraction : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15} = \ldots$

Nous avons évoqué les « fractions de même famille », dans un paragraphe récent (*Méfiez-vous des « contrefractions » !*)

Précisons tout de suite que nous avons choisi d'appeler « fractions de la même famille » des fractions qui ont le même dénominateur : il nous arrivera donc de parler de la famille des demis, ou des tiers, des quarts, des cinquièmes, etc.

Nous utiliserons ce mot lorsqu'il nous semblera « parlant », bien adapté à notre interprétation des fractions, mais nous devons préciser qu'<u>il ne s'agit PAS d'un nom officiel</u> : la formulation courante est : « fractions de même dénominateur ».

Nous verrons très bientôt que le point faible des fractions, c'est la difficulté à les ajouter - ou à les soustraire : la somme de tiers et de quarts n'est généralement ni des tiers, ni des quarts ... ni des septièmes !

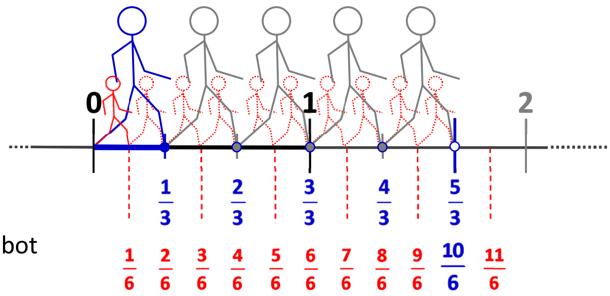
(C'est d'ailleurs sur cette faiblesse que les nombres décimaux ont prospéré : l'addition et la soustraction y sont très faciles, et ce sont les opérations qu'on utilise le plus souvent dans la vie courante.)

Pour compenser cette faiblesse, les fractions ont un atout : si elles se présentent sous une écriture qui ne vous convient pas, vous pouvez leur en choisir une autre !

Niveau 2

« Compliquer » (l'écriture de) $\frac{5}{3}$

Partons de la 1ère interprétation robotique de $\frac{5}{3}$:



si nous décidons ensuite de séparer chacun des 5 pas du robot
en **2** segments de même longueur,
et si nous adaptons les pas du robot à ces nouveaux segments,

il lui faudra **2** fois plus de pas (*6 pas au lieu de 3*) pour parcourir le segment-unité
- qui est alors séparé en sixièmes –

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$$

et également **2** fois plus de pas (*10 pas au lieu de 5*) pour atteindre son but !

Si nous préférons séparer chacun des 5 pas du robot
en **3** segments de même longueur…

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{15}{9}$$

… … … …

Si nous décidons de séparer chacun des 5 pas du robot
en ***m*** segments de même longueur
(*m* étant un nombre entier positif non nul)…

$$\boxed{\frac{5}{3} = \frac{5 \times m}{3 \times m}}$$

$\frac{5}{3}$ appartient donc à un nombre illimité de familles différentes - celles dont le dénominateur est un multiple de 3.

Existe-t-il une écriture de $\frac{5}{3}$ ***« plus compliquée » que toutes les autres ?***

(Une écriture dont le numérateur et le dénominateur seraient plus grands que ceux de toutes les autres écritures ?)

Non : quel que soit le nombre entier par lequel on multiplie 5 et 3 , il y en aura toujours de plus grands que lui.

« Simplifier » (l'écriture de) $\frac{20}{12}$

Il est toujours possible de compliquer l'écriture d'une fraction… Mais pas de la simplifier !

« Simplifier une fraction », cela revient à en découvrir une autre écriture *qu'on pourrait compliquer* - en multipliant son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier - *pour atteindre celle d'où nous partons* !

Ou encore : cela revient à diviser (toujours par un nombre entier !) le numérateur et le dénominateur de l'écriture d'où nous partons pour atteindre une nouvelle écriture « plus simple ».

Mais toujours une écriture de fraction, avec des nombres entiers : vous ne pourrez donc « simplifier une fraction » que si son numérateur et son dénominateur sont des multiples d'un même nombre (en les divisant par ce nombre, vous obtiendrez bien des nombres entiers) : vous revenez alors à la situation précédente, lue « à l'envers ».

20 et 12 sont des multiples de 4 : $20 = 5 \times \mathbf{4}$ et $12 = 3 \times \mathbf{4}$, donc $\frac{20}{12} = \frac{5\times 4}{3\times 4}$

Et nous savons que $\frac{5\times 4}{3\times 4}$ est une écriture « compliquée » de $\frac{5}{3}$ … donc $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Pourquoi n'est-il pas toujours possible de simplifier l'écriture d'une fraction ?

Parce que son numérateur et son dénominateur ne sont pas toujours des multiples d'un même nombre.

Existe-t-il une écriture de $\frac{5}{3}$ « plus simple» que toutes les autres ?

Oui. Et nous le démontrerons dans quelques temps ! On arrive à cette écriture après avoir épuisé toutes les divisions possibles des numérateurs et dénominateurs d'écritures successives - de plus en plus simples. On appelle cette écriture finale l'**écriture** (ou « la **forme** ») ***irréductible*** de la fraction.

Et la forme irréductible de $\frac{5}{3}$ est... $\frac{5}{3}$!

(Vous pouvez vérifier que 5 et 3 ne sont pas des multiples d'un même nombre. À part, évidemment, de 1 !)

« Compliquer » l'écriture d'une fraction est facile :

n'importe quelle multiplication du numérateur et du dénominateur (par un même entier positif non nul, tout de même) fait l'affaire.

« Simplifier » l'écriture d'une fraction est bien plus difficile :

il vous faut chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur - sans même savoir s'il en existe un ! - et cela, vous ne pourrez vraiment le faire qu'en vous appuyant sur les « entiers premiers ». Nous les étudierons immédiatement après les nombres rationnels, et nous reviendrons alors sur les simplifications d'une fraction et sur sa forme irréductible.

En attendant, utilisez au mieux les critères de divisibilité que vous connaissez... et votre calculatrice !

Les nombres décimaux, des fractions qui se dissimulent :

Reprenons une phrase du *survol des acquis du cycle 3* :

> Mais tout particulièrement, vous avez découvert les fractions décimales (celles dont le dénominateur peut être 1, 10, 100, 1000, etc.) et, par extension, les ***nombres décimaux***.

(Pourquoi « dont le dénominateur *peut être*... » ?
Vous avez maintenant la réponse : par exemple $8{,}2$ peut s'écrire $\frac{82}{10}$ mais également $\frac{41}{5}$ ou $\frac{164}{20}$!)

Les nombres décimaux sont des écritures différentes (mieux adaptées à l'addition et à la soustraction) de fractions particulières. Qui sont elles-mêmes des sommes de fractions encore plus particulières, dont le numérateur est inférieur à 10 : $3{,}207 = \frac{3207}{1000} = \frac{3}{1} + \frac{2}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000}$.

L'ensemble des « **nombres rationnels** » (les nombres obtenus en divisant un entier par un autre) n'est donc pas constitué de trois catégories distinctes - entiers, décimaux et fractions - mais uniquement de fractions... dont certaines peuvent s'écrire autrement.

Cette remarque va nous faciliter l'étude des relations et des opérations entre nombres rationnels, puisqu'il nous suffira d'étendre à toutes les fractions ce que nous avons déjà défini sur certaines d'entre elles.

Les opérations sur les nombres rationnels

Il nous semble qu'il est temps, maintenant, d'éloigner notre robot à l'arrière-plan de ce livre, et de nous concentrer sur des observations et des raisonnements strictement mathématiques.

Mais avant de le laisser regagner la pénombre, reconnaissons ses mérites :

c'est lui qui nous a appris à faire le lien entre les points d'une droite et les nombres, puis à faire apparaître des ensembles de plus en plus efficaces de nombres, simplement en faisant varier la longueur de ses pas.

C'est également lui qui nous a appris à associer « opérations » et « déplacements sur une droite graduée », et c'est là quelque chose d'absolument fondamental.

Pourquoi ?

Parce qu'au cours de nos observations, nous avons mis en évidence des propriétés de l'addition et de la multiplication. Mais ces propriétés n'étaient pas, en réalité, associées à un ensemble particulier de nombres (les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux ou les rationnels) : elles étaient associées à la nature même d'un déplacement, à son essence géométrique.

Au cœur de toutes nos opérations, il y avait les points d'une droite : quel point allions-nous atteindre, ou parfois par quel déplacement pourrions-nous atteindre ce point ?

Traduites en déplacements, les propriétés que vous avez commencé à découvrir au cycle 3 (sur les nombres entiers naturels) vous ont paru raisonnables : il vous est donc également paru raisonnable de les étendre à des déplacements vers un point dont l'abscisse n'était plus un entier naturel, mais un entier relatif ou un nombre décimal.

Nous allons maintenant admettre l'extension de ces propriétés aux points dont l'abscisse est une fraction - mais toujours sans démonstrations (vous aurez peut-être l'occasion d'y réfléchir un jour, bien après le cycle 4).

En nous appuyant sur ces propriétés - et sur l'outil de construction géométrique que nous connaissons - nous pourrons alors définir les algorithmes des opérations entre fractions !

Une autre vision des entiers naturels

De l'apparence à la structure

Soulignées ou non, toutes les lignes sont « cliquables »

Table générale des matières

Une autre vision des entiers naturels

Introduction à l'arithmétique : de l'apparence à la structure

Nous avons quitté notre étude des nombres rationnels sur deux questions :

Addition de fractions :

existe-t-il un algorithme qui nous permettrait de déterminer le plus petit des dénominateurs communs à 2 fractions (la plus petite famille commune à ces 2 fractions ?)

Points d'une droite graduée :

avec les nombres rationnels, avons-nous « touché » tous les points de la droite ?
(Les points de la droite ont-ils tous une abscisse rationnelle ?)

Pour y répondre, nous allons tenter une incursion dans une des branches les plus secrètes des mathématiques. Une branche déroutante, parce qu'elle dissimule sous une apparence anodine (on n'y observe que des nombres entiers positifs) certains des raisonnements les plus complexes des mathématiques... et certaines des questions les plus exaspérantes : des questions dont la formulation est extrêmement simple, et pourtant, les meilleurs mathématiciens du monde cherchent à y répondre depuis plusieurs siècles, sans succès !

Au cœur de l'arithmétique, il y a un ensemble de nombres - les « entiers naturels » (ceux que, dans les autres branches des mathématiques, nous appelons les « entiers positifs ») - et une opération, la multiplication.

Lorsqu'un non-arithméticien observe la succession des entiers naturels, il voit ceci :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

Mais lorsqu'un arithméticien observe la même succession, voici plus vraisemblablement ce qu'il y voit :

0 **1** ***2*** ***3*** 4 ***5*** 6 ***7*** 8 9 10 ***11*** 12 ***13*** 14 15 16 ***17*** 18 ***19*** 20 21 22 ***23*** 24 25 26 27 28 ***29*** 30 ***31*** 32 33 ...

Il sépare en effet les entiers naturels en trois catégories :

la première, qui ne comporte que **0** et **1** , lui rappelle que ces deux nombres ont une relation trop particulière avec la multiplication pour pouvoir être traités comme les autres.

La seconde, (celle qui commence par ***2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31*** ...) est celle sur laquelle il s'appuie constamment en arithmétique : il appelle « **entiers premiers** » les nombres qui la constituent.

La dernière, enfin, est formée de tous les autres entiers naturels, qu'il appelle « **entiers composés** ».

Comment sépare-t-il les entiers de ces deux dernières catégories ? Quelle différence voit-il entre un « entier premier » et un « entier composé » ?

Tout repose sur la multiplication.

Observez les premiers « entiers composés » de notre liste :

$4 = 2 \times 2$ $6 = 2 \times 3$ $8 = 2 \times 4$ $9 = 3 \times 3$ $10 = 2 \times 5$ $12 = 3 \times 4$ $14 = 2 \times 7$ $15 = 3 \times 5$ ...

Chacun de ces entiers peut-être construit, ***composé***, par une multiplication *d'autres* entiers !

(Il est important de préciser « *d'autres* entiers », parce que, n'importe quel entier peut toujours être considéré comme le produit de lui-même par 1. Peut-être commencez-vous à comprendre la nécessité de la première catégorie ?)

Et maintenant, observez les « entiers premiers » : ***2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31*** ...

Aucun de ces entiers ne peut-être construit par une multiplication *d'autres* entiers !

Pourquoi avoir appelé « entiers ***premiers*** » les entiers qui ne sont pas « composés » ?
Parce qu'ils sont à l'origine de (presque) tous les autres entiers, et nous allons le vérifier !

(Pourquoi « presque » ? Parce que les entiers premiers ne sont à l'origine - par multiplication - ni de 0, ni de 1 !)

Des entiers composés... d'entiers premiers !

Les entiers premiers sont la matière première de (presque) tous les entiers naturels, tout comme les atomes sont la matière première de tout ce qui est matériel - vivant ou non... Mais nous verrons bientôt que cette analogie n'est pas parfaite !

Certains des entiers composés que nous avons observés apparaissent bien immédiatement comme le produit de deux entiers premiers : $4 = 2 \times 2$ $6 = 2 \times 3$ $9 = 3 \times 3$ $10 = 2 \times 5$ $14 = 2 \times 7$

Mais que pouvons-nous dire de 8 ou de 12 , par exemple ?

$8 = 2 \times 4$ $12 = 3 \times 4$ mais 4 n'est pas premier !

Niveau 3

Toutefois, $4 = 2 \times 2$, et 2 est premier, donc 8 et 12 sont bien des produits d'entiers premiers :

$8 = 2 \times 2 \times 2$ $\quad 12 = 3 \times 2 \times 2$

Ou encore, que dire de 120 ? $\quad 120 = 12 \times 10 \quad 120 = \underline{3 \times 4} \times \underline{2 \times 5}$ donc : $\quad 120 = 3 \times \underline{2 \times 2} \times 2 \times 5$

Un entier composé peut apparaître comme le produit de deux entiers composés (qui sont alors tous les deux plus petits que lui), mais il sera toujours possible de remplacer ces entiers par des produits d'entiers encore plus petits, qui à leur tour, *etc.* Jusqu'à l'obtention d'une chaîne d'entiers premiers.

Tout entier composé est donc le résultat ou d'une multiplication, ou d'une chaîne de multiplications entre entiers premiers.

À partir de maintenant, et bien que ce soit un abus de langage (une chaîne est formée d'au moins deux maillons), nous ne ferons plus la distinction entre une multiplication unique et une chaîne de multiplications, et nous écrirons qu'**un entier composé est le résultat d'une chaîne de multiplications entre entiers premiers**.

Pour chaque entier composé, une composition... ou plusieurs ?

Tout dépend du sens que nous donnerons au mot « composition ».

Reprenons par exemple 120 : $\quad 120 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$ mais également $\quad 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Si nous calculons ces deux chaînes de multiplications en respectant la deuxième règle de la convention de priorité (donc de gauche à droite), nous atteignons 120 à travers des calculs différents : nous pourrions donc considérer qu'il s'agit de deux compositions différentes de 120 . Cependant les deux chaînes contiennent exactement les mêmes facteurs, et nous avons déjà observé (propriétés de l'addition et de la multiplication) que :

> *Lorsqu'une opération est à la fois commutative et associative, le calcul d'une succession de cette opération est simplifié :* le résultat ne dépend plus de l'ordre dans lequel vous en écrivez les termes (ni, par conséquent, de l'ordre dans lequel vous effectuez les opérations : la deuxième règle de la convention de priorité devient inutile).

Il est donc légitime de considérer ces deux chaînes comme deux écritures différentes de la même composition : nous déciderons d'appeler « chaîne ordonnée » la seconde chaîne ($2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$: les entiers premiers qui la constituent y apparaissent - de gauche à droite - du plus petit au plus grand), et de l'utiliser de préférence aux autres. Mais ce n'est nullement une obligation !

Niveau 3

Niveau 3

Puisque les variations d'une « chaîne ordonnée » ne sont que des expressions différentes de la même composition, cela veut-il dire qu'un nombre composé ne peut l'être que d'une seule façon ?

Nous ne l'avons pas encore prouvé : peut-être pourrions-nous composer 120 par des « chaînes ordonnées » (d'entiers premiers) différentes de $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$?

L'étude de cette question déborderait largement le cycle 4 (mais rien ne vous empêche de jeter un coup d'œil discret sur Wikipédia, à « théorème fondamental de l'arithmétique » et à « lemme d'Euclide »), et nous devons nous contenter d'admettre les deux affirmations suivantes :

> ***La composition d'un nombre composé est définie par deux éléments*** :
> les entiers premiers qui entrent dans cette composition,
> le nombre de fois où chacun d'entre eux est répété (dans une chaîne de multiplications qui détermine le nombre).
>
> ***Cette composition est unique*** !

Les « chaînes ordonnées » (des entiers premiers) de quelques entiers composés

$4 = 2 \times 2$	$12 = 2 \times 2 \times 3$	$20 = 2 \times 2 \times 5$	$26 = 2 \times 13$
$6 = 2 \times 3$	$14 = 2 \times 7$	$21 = 3 \times 7$	$27 = 3 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$15 = 3 \times 5$	$22 = 2 \times 11$	$28 = 2 \times 2 \times 7$
$9 = 3 \times 3$	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$	$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$30 = 2 \times 3 \times 5$
$10 = 2 \times 5$	$18 = 2 \times 3 \times 3$	$25 = 5 \times 5$	$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Comment déterminer la « chaîne ordonnée » (des entiers premiers) d'un entier composé quelconque ?

Bien souvent, il vous suffira de déterminer (mentalement) deux entiers dont il est le produit puis, si l'un de ces entiers (ou les deux) n'est pas premier, de recommencer jusqu'à ce que tous les facteurs de la chaîne soient premiers. Les « chaînes ordonnées » du tableau ci-dessus pourront évidemment vous simplifier le travail !

Par exemple : $48 = 6 \times 8$ et $6 = 2 \times 3$; $8 = 2 \times 2 \times 2$ donc $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Pour des cas plus compliqués, il existe des algorithmes de recherche des entiers premiers qui composent un entier quelconque, mais ils ne sont pas au programme du cycle 4 ! (Nous en observerons cependant un dans un second tome, en « algorithmique »)

Multiples d'un entier naturel

Tout d'abord une précision de vocabulaire.
Dans toute la suite de ce chapitre, le mot « ***chaîne*** » ne sera associé qu'à des entiers naturels composés ou premiers et signifiera :

pour un entier composé, une chaîne de multiplications entre entiers premiers, déterminant cet entier,

pour un entier premier, cet entier lui-même (il s'agit évidemment d'un abus de langage : il ne peut y avoir de chaîne de multiplications sans multiplications ! Mais cet abus simplifiera la rédaction des lignes à venir)

Par exemple : chaîne (ordonnée) associée à 90 : $2 \times 3 \times 3 \times 5$ chaîne associée à 23 : 23

HORS PROGRAMME Nous excluons 0 et 1 de cette introduction aux chaînes. Précisons tout de même qu'à 1 correspond une « chaîne vide » : cela permet, si on le souhaite, d'y introduire un ou plusieurs entiers premiers et de vérifier ainsi que tout entier non nul est un multiple de 1 . En revanche, il est impossible d'associer une chaîne à 0 : 0 étant absorbant pour la multiplication, 0 est un multiple de chaque entier naturel, et sa chaîne devrait donc contenir tous les entiers premiers… mais nous verrons bientôt que l'ensemble des entiers premiers est infini !

Reprenons maintenant notre survol des acquis du cycle 3 :

Les multiples d'un nombre entier sont les nombres obtenus en multipliant cet entier par un entier quelconque …

En voici une interprétation, fondée sur l'observation des chaînes :

La chaîne (ordonnée ou non) **d'un multiple d'un entier naturel *<u>contient</u>* la chaîne de cet entier**.

120 est un multiple de 15 ***équivaut à :*** $\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{8} \times \underbrace{3 \times 5}_{15}$ contient $\underbrace{3 \times 5}_{15}$

$\underbrace{120 = 8 \times 15}$

« ***Contient*** » est à prendre au sens large (« contient <u>au moins</u> »), puisqu'un entier est un multiple de lui-même !

À partir de la chaîne d'un entier, vous devez donc, pour obtenir celle d'un multiple de cet entier...

… Soit ne rien y changer : un entier est un multiple de lui-même !

… Soit y introduire un entier premier supplémentaire - ou plusieurs.

Une application de l'étude des multiples à l'addition de fractions

À condition de savoir associer leurs chaînes aux dénominateurs de deux fractions que nous voulons ajouter, nous avons maintenant la réponse à la première question de ce chapitre : il existe un algorithme qui détermine le plus petit des dénominateurs communs à ces deux fractions (la plus petite de leurs « familles d'accueil »), et nous pouvons donc calculer efficacement la somme de ces fractions.

Nous nous contenterons d'un exemple, dont le principe sera applicable à toutes les fractions :

Niveau 3

Précisons toutefois que $\sqrt{p}$ est avant tout l'écriture d'une *opération* (unaire) sur p , et qu'il est préférable, lorsque vous connaissez le résultat de cette opération, de l'écrire directement :

dans un calcul ou dans une conclusion, écrivez 5 plutôt que $\sqrt{25}$, 2,5 plutôt que $\sqrt{6,25}$, sauf lorsqu'il vous paraît nécessaire d'insister sur la racine carrée.

D'où vient ce symbole ?

Il semble avoir été inventé par le mathématicien allemand Christoff Rudolff, vers 1525 : il serait alors une stylisation de la lettre " r " (du latin « *radix* » , pour « racine » ?)… mais les historiens des mathématiques sont loin d'en être tous d'accord.

Pourquoi « racine » ? Il faut vraisemblablement prendre ce mot dans le sens d'*origine* : à l'origine de l'aire d'un carré se trouve la longueur d'un côté de ce carré (5 serait donc « à l'origine de » 25).

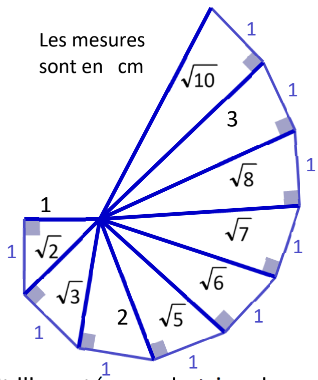
Les nombres positifs ont-ils tous une racine carrée ?

La réponse est oui, mais le démontrer dépasse de loin le cycle 4.
En revanche, il n'est pas très difficile de démontrer que tous les nombres rationnels positifs ont une racine carrée, en s'appuyant sur le théorème de Pythagore (dont vous trouverez la démonstration dans le second tome) :

⇳

soient A, B, C trois points de l'espace. Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Les nombres entiers positifs ont tous une racine carrée :



voici une construction géométrique (un algorithme) qui permet de construire facilement des segments dont les longueurs sont les racines carrées des nombres entiers successifs, à partir de 1.
On l'appelle le « colimaçon de Pythagore » - ou parfois, l'escargot de Pythagore :
il se fonde sur une répétition du théorème de ce mathématicien,
appliquée à une succession de triangles rectangles.

Les côtés de l'angle droit du premier triangle mesurent tous les deux 1 cm :
d'après le théorème de Pythagore, son hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ cm .
(Son carré vaut $1^2 + 1^2$, donc $1 + 1$, donc 2 !)

Le triangle suivant est construit de façon à ce que l'un des côtés de son angle droit soit l'hypoténuse du triangle précédent et l'autre côté, à l'extérieur du colimaçon, mesure encore 1 cm : son hypoténuse mesure alors $\sqrt{3}$ cm .

(Son carré vaut $1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$, donc $1 + 2$, donc 3 !)

Tous les triangles suivants sont construits sur le même modèle, les longueurs de leurs hypoténuses seront donc :
$\sqrt{4}$ (donc 2) , $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ (donc 3) , $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$ …

Niveau 2

Les nombres rationnels positifs ont donc tous une racine carrée :

Par exemple, $\sqrt{\frac{5}{11}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$, puisque $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{5}{11}$ … Qui est bien le carré de $\sqrt{\frac{5}{11}}$!

Et les autres nombres positifs (les nombres réels irrationnels) ?

Mais déjà existent-ils ?

Vous rappelez-vous la conclusion du chapitre précédent («Une introduction à l'arithmétique ») ?

> **Et la deuxième question ?**
>
> Nous avons répondu à la première des deux questions qui ont ouvert ce chapitre :
> existe-t-il un algorithme pour déterminer la plus petite « famille » commune à deux fractions ?
>
> Mais qu'en est-il de la deuxième question : les points de la droite ont-ils tous une abscisse rationnelle ?
>
> L'arithmétique nous sera nécessaire pour y répondre. Nécessaire mais pas suffisante : nous nous appuierons également sur une nouvelle opération entre nombres rationnels, la « puissance ».
>
> Qui sera l'objet du chapitre suivant !

Nous allons enfin pouvoir vérifier qu'il existe des points d'une droite graduée dont l'abscisse n'est pas rationnelle.

Nous venons de le voir, il est possible de construire un segment de $\sqrt{2}$ cm. Donc, sur une demi-droite « positive » graduée en centimètres, le point situé à cette distance de l'origine aura bien comme abscisse $\sqrt{2}$.

Mais nous pouvons démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et voici *le principe* de cette démonstration (qui est tout à fait hors-programme, mais nous paraît suffisamment intéressante et compréhensible pour figurer ici) :

Supposons **que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel**. Alors, il existe deux entiers positifs, a et b , tels que : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Ou, en passant aux carrés : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, c'est-à-dire $\frac{a^2}{b^2} = 2$ ou encore : $a^2 = 2 \times b^2$.

Revenons maintenant à l'arithmétique : $a^2 = a \times a$ donc la « chaîne » de a^2 contient exactement tous les éléments de la « chaîne » de a , *en double* (si la « chaîne » de a était $3 \times 3 \times 7$, celle de a^2 serait $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$) … et il en est de même pour b !

Mais alors, la « chaîne » de $2\times b^2$, qui contient juste <u>*un*</u> « 2 » de plus que celle de b^2, n'a plus tous ses éléments en double : elle ne peut donc pas être égale à la « chaîne » de a^2.

Autrement dit, **<u>notre supposition n'est pas réaliste</u> : $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel** !

(Et c'est bien sûr encore un exemple de raisonnement « par l'absurde » !)
Et comme ce raisonnement peut s'appliquer aux racines carrées de tous les nombres entiers qui ne sont pas des carrés parfaits, nous n'avons pas seulement montré que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : nous avons également montré que les racines carrées de beaucoup d'autres nombres entiers ne l'étaient pas non plus.

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés « nombres irrationnels », et les racines carrées n'en constituent qu'une partie !

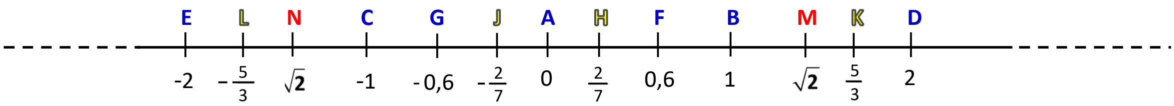
Maintenant que nous savons qu'ils existent,
nous pouvons revenir à la question « les nombres irrationnels positifs ont-ils tous une racine carrée ? **»…** mais également, avec regret, à la première phrase de ce paragraphe sur les nombres réels positifs :

La réponse est oui, mais sa démonstration dépasse de loin le cycle 4 !

La question revient à : est-il possible de « zoomer » un carré de 1 cm de côté, et donc d'une aire de 1 cm^2,
pour atteindre exactement un carré dont l'aire est un nombre que vous avez choisi ?

La « droite des réels » : l'univers envahissant des irrationnels

À chaque point d'une droite graduée correspond un nombre réel,
à chaque nombre réel correspond un point de cette droite.



Nous avons longuement étudié les réels rationnels et à peine effleuré les autres, les réels irrationnels : une étude approfondie des irrationnels serait évidemment déplacée dans un livre dédié cycle 4.

En revanche, il nous paraît utile, dès maintenant, de les situer par rapport aux rationnels :
sont-ils beaucoup moins nombreux, aussi nombreux, beaucoup plus nombreux ?
(Les quelques lignes suivantes ne seront malheureusement que des affirmations, indémontrables au cycle 4 !)

Hors - cycle

Observons une droite graduée.

Dans le but de simplifier les phrases qui suivent, « *point entier* », « *point décimal* », *etc.* signifiera « *point dont l'abscisse est entière* », « *point dont l'abscisse est décimale* », *etc.* : ce n'est évidemment qu'un abus de langage.

Imaginez que <u>chacun</u> des points - entiers, décimaux, fractions ou irrationnels - de cette droite contienne ce que nous avons appelé dans le livre « *… Donc, d'après…* » un *objet ponctuel* : un objet infiniment petit (non, ça n'existe pas) ! Bleu pour les décimaux - y compris les entiers, jaune pour les autres rationnels, rouge pour les irrationnels.

Imaginez encore que nous ayons le pouvoir de décolorer (« d'éteindre ») les points que nous choisissons.

Si nous décidons d'éteindre tous les points sauf les bleus, la droite paraîtra bleue… *sans trous visibles*.

Si nous éteignons tous les points sauf les jaunes, la droite paraîtra jaune… là encore, *sans trous visibles*.

Si nous éteignons tous les points saufs les bleus et les jaunes, la droite paraîtra verte… à nouveau, *sans trous visibles* (il y a autant de décimaux que de rationnels non décimaux… c'est étrange, mais démontrable !)

Si nous éteignons tous les points sauf les rouges, la droite paraîtra rouge… et toujours *sans trous visibles*.

Jusque-là, c'est assez compréhensible – à part, peut-être, cette absence de trous apparents.

Et si maintenant nous décidons de garder <u>tous les points</u> « allumés » ? La droite paraîtra aussi franchement rouge qu'à l'étape précédente. *Aucun trou*… et pourtant aucune trace apparente de bleu, de jaune ou de vert !

Chaque nombre rationnel est noyé parmi des milliards de nombres irrationnels !
(les irrationnels sont infiniment plus nombreux que les rationnels)