

Une autre vision des entiers naturels

De l'apparence à la structure

Soulignées ou non, toutes les lignes sont « cliquables »

Table générale des matières

Une autre vision des entiers naturels

Introduction à l'arithmétique : de l'apparence à la structure

Nous avons quitté notre étude des nombres rationnels sur deux questions :

Addition de fractions :

existe-t-il un algorithme qui nous permettrait de déterminer le plus petit des dénominateurs communs à 2 fractions (la plus petite famille commune à ces 2 fractions ?)

Points d'une droite graduée :

avec les nombres rationnels, avons-nous « touché » tous les points de la droite ?
(Les points de la droite ont-ils tous une abscisse rationnelle ?)

Pour y répondre, nous allons tenter une incursion dans une des branches les plus secrètes des mathématiques. Une branche déroutante, parce qu'elle dissimule sous une apparence anodine (on n'y observe que des nombres entiers positifs) certains des raisonnements les plus complexes des mathématiques... et certaines des questions les plus exaspérantes : des questions dont la formulation est extrêmement simple, et pourtant, les meilleurs mathématiciens du monde cherchent à y répondre depuis plusieurs siècles, sans succès !

Au cœur de l'arithmétique, il y a un ensemble de nombres - les « entiers naturels » (ceux que, dans les autres branches des mathématiques, nous appelons les « entiers positifs ») - et une opération, la multiplication.

Lorsqu'un non-arithméticien observe la succession des entiers naturels, il voit ceci :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

Mais lorsqu'un arithméticien observe la même succession, voici plus vraisemblablement ce qu'il y voit :

0 **1** ***2*** ***3*** 4 ***5*** 6 ***7*** 8 9 10 ***11*** 12 ***13*** 14 15 16 ***17*** 18 ***19*** 20 21 22 ***23*** 24 25 26 27 28 ***29*** 30 ***31*** 32 33 ...

Il sépare en effet les entiers naturels en trois catégories :

la première, qui ne comporte que **0** et **1** , lui rappelle que ces deux nombres ont une relation trop particulière avec la multiplication pour pouvoir être traités comme les autres.

Niveau 3

La seconde, (celle qui commence par ***2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31*** ...) est celle sur laquelle il s'appuie constamment en arithmétique : il appelle « **entiers premiers** » les nombres qui la constituent.

La dernière, enfin, est formée de tous les autres entiers naturels, qu'il appelle « **entiers composés** ».

Comment sépare-t-il les entiers de ces deux dernières catégories ? Quelle différence voit-il entre un « entier premier » et un « entier composé » ?

Tout repose sur la multiplication.

Observez les premiers « entiers composés » de notre liste :

$4 = 2 \times 2$ $6 = 2 \times 3$ $8 = 2 \times 4$ $9 = 3 \times 3$ $10 = 2 \times 5$ $12 = 3 \times 4$ $14 = 2 \times 7$ $15 = 3 \times 5$ ...

Chacun de ces entiers peut-être construit, ***composé***, par une multiplication *d'autres* entiers !

(Il est important de préciser « *d'autres* entiers », parce que, n'importe quel entier peut toujours être considéré comme le produit de lui-même par 1. Peut-être commencez-vous à comprendre la nécessité de la première catégorie ?)

Et maintenant, observez les « entiers premiers » : ***2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31*** ...

Aucun de ces entiers ne peut-être construit par une multiplication *d'autres* entiers !

Pourquoi avoir appelé « entiers ***premiers*** » les entiers qui ne sont pas « composés » ?
Parce qu'ils sont à l'origine de (presque) tous les autres entiers, et nous allons le vérifier !
(Pourquoi « presque » ? Parce que les entiers premiers ne sont à l'origine - par multiplication - ni de 0, ni de 1 !)

Des entiers composés... d'entiers premiers !

Les entiers premiers sont la matière première de (presque) tous les entiers naturels, tout comme les atomes sont la matière première de tout ce qui est matériel - vivant ou non... Mais nous verrons bientôt que cette analogie n'est pas parfaite !

Certains des entiers composés que nous avons observés apparaissent bien immédiatement comme le produit de deux entiers premiers : $4 = 2 \times 2$ $6 = 2 \times 3$ $9 = 3 \times 3$ $10 = 2 \times 5$ $14 = 2 \times 7$

Mais que pouvons-nous dire de 8 ou de 12 , par exemple ?

$8 = 2 \times 4$ $12 = 3 \times 4$ mais 4 n'est pas premier !

Toutefois, $4 = 2 \times 2$, et 2 est premier, donc 8 et 12 sont bien des produits d'entiers premiers :

$8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 12 = 3 \times 2 \times 2$

Ou encore, que dire de 120 ? $\quad 120 = 12 \times 10 \quad 120 = \underline{3 \times 4} \times \underline{2 \times 5}$ donc : $120 = 3 \times \underline{2 \times 2} \times 2 \times 5$

Un entier composé peut apparaître comme le produit de deux entiers composés (qui sont alors tous les deux plus petits que lui), mais il sera toujours possible de remplacer ces entiers par des produits d'entiers encore plus petits, qui à leur tour, *etc.* Jusqu'à l'obtention d'une chaîne d'entiers premiers.

Tout entier composé est donc le résultat ou d'une multiplication, ou d'une chaîne de multiplications entre entiers premiers.

À partir de maintenant, et bien que ce soit un abus de langage (une chaîne est formée d'au moins deux maillons), nous ne ferons plus la distinction entre une multiplication unique et une chaîne de multiplications, et nous écrirons qu'**un entier composé est le résultat d'une chaîne de multiplications entre entiers premiers**.

Pour chaque entier composé, une composition... ou plusieurs ?

Tout dépend du sens que nous donnerons au mot « composition ».

Reprenons par exemple 120 : $\quad 120 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$ mais également $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Si nous calculons ces deux chaînes de multiplications en respectant la deuxième règle de la convention de priorité (donc de gauche à droite), nous atteignons 120 à travers des calculs différents : nous pourrions donc considérer qu'il s'agit de deux compositions différentes de 120 . Cependant les deux chaînes contiennent exactement les mêmes facteurs, et nous avons déjà observé (propriétés de l'addition et de la multiplication) que :

> *Lorsqu'une opération est <u>à la fois</u> <u>commutative et associative</u>, le calcul d'une succession <u>de cette opération</u> est simplifié :* le résultat ne dépend plus de l'ordre dans lequel vous en écrivez les termes (ni, par conséquent, de l'ordre dans lequel vous effectuez les opérations : la deuxième règle de la convention de priorité devient inutile).

Il est donc légitime de considérer ces deux chaînes comme deux écritures différentes de la même composition : nous déciderons d'appeler « chaîne ordonnée » la seconde chaîne ($2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$: les entiers premiers qui la constituent y apparaissent - de gauche à droite - du plus petit au plus grand), et de l'utiliser de préférence aux autres. Mais ce n'est nullement une obligation !

Niveau 3

Puisque les variations d'une « chaîne ordonnée » ne sont que des expressions différentes de la même composition, cela veut-il dire qu'un nombre composé ne peut l'être que d'une seule façon ?

Nous ne l'avons pas encore prouvé : peut-être pourrions-nous composer 120 par des « chaînes ordonnées » (d'entiers premiers) différentes de $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$?

L'étude de cette question déborderait largement le cycle 4 (mais rien ne vous empêche de jeter un coup d'œil discret sur Wikipédia, à « théorème fondamental de l'arithmétique » et à « lemme d'Euclide »), et nous devons nous contenter d'admettre les deux affirmations suivantes :

> ***La composition d'un nombre composé est définie par deux éléments*** :
> les entiers premiers qui entrent dans cette composition,
> le nombre de fois où chacun d'entre eux est répété (dans une chaîne de multiplications qui détermine le nombre).
>
> ***Cette composition est unique*** !

Les « chaînes ordonnées » (des entiers premiers) de quelques entiers composés

$4 = 2 \times 2$	$12 = 2 \times 2 \times 3$	$20 = 2 \times 2 \times 5$	$26 = 2 \times 13$
$6 = 2 \times 3$	$14 = 2 \times 7$	$21 = 3 \times 7$	$27 = 3 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$15 = 3 \times 5$	$22 = 2 \times 11$	$28 = 2 \times 2 \times 7$
$9 = 3 \times 3$	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$	$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$30 = 2 \times 3 \times 5$
$10 = 2 \times 5$	$18 = 2 \times 3 \times 3$	$25 = 5 \times 5$	$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Comment déterminer la « chaîne ordonnée » (des entiers premiers) d'un entier composé quelconque ?

Bien souvent, il vous suffira de déterminer (mentalement) deux entiers dont il est le produit puis, si l'un de ces entiers (ou les deux) n'est pas premier, de recommencer jusqu'à ce que tous les facteurs de la chaîne soient premiers. Les « chaînes ordonnées » du tableau ci-dessus pourront évidemment vous simplifier le travail !

Par exemple : $48 = 6 \times 8$ et $6 = 2 \times 3$; $8 = 2 \times 2 \times 2$ donc $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Pour des cas plus compliqués, il existe des algorithmes de recherche des entiers premiers qui composent un entier quelconque, mais ils ne sont pas au programme du cycle 4 ! (Nous en observerons cependant un dans un second tome, en « algorithmique »)

Multiples d'un entier naturel

Tout d'abord une précision de vocabulaire.
Dans toute la suite de ce chapitre, le mot « ***chaîne*** » ne sera associé qu'à des entiers naturels composés ou premiers et signifiera :

Niveau 3

pour un entier composé, une chaîne de multiplications entre entiers premiers, déterminant cet entier,

pour un entier premier, cet entier lui-même (il s'agit évidemment d'un abus de langage : il ne peut y avoir de chaîne de multiplications sans multiplications ! Mais cet abus simplifiera la rédaction des lignes à venir)

Par exemple : chaîne (ordonnée) associée à 90 : $2 \times 3 \times 3 \times 5$ chaîne associée à 23 : 23

HORS PROGRAMME Nous excluons 0 et 1 de cette introduction aux chaînes. Précisons tout de même qu'à 1 correspond une « chaîne vide » : cela permet, si on le souhaite, d'y introduire un ou plusieurs entiers premiers et de vérifier ainsi que tout entier non nul est un multiple de 1 . En revanche, il est impossible d'associer une chaîne à 0 : 0 étant absorbant pour la multiplication, 0 est un multiple de chaque entier naturel, et sa chaîne devrait donc contenir tous les entiers premiers… mais nous verrons bientôt que l'ensemble des entiers premiers est infini !

Reprenons maintenant notre survol des acquis du cycle 3 :

Les multiples d'un nombre entier sont les nombres obtenus en multipliant cet entier par un entier quelconque …

En voici une interprétation, fondée sur l'observation des chaînes :

La chaîne (ordonnée ou non) **d'un multiple d'un entier naturel *<u>contient</u>* la chaîne de cet entier**.

120 est un multiple de 15 ***équivaut à :*** $\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{8} \times \underbrace{3 \times 5}_{15}$ contient $\underbrace{3 \times 5}_{15}$

$\underbrace{120 = 8 \times 15}$

« ***Contient*** » est à prendre au sens large (« contient <u>au moins</u> »), puisqu'un entier est un multiple de lui-même !

À partir de la chaîne d'un entier, vous devez donc, pour obtenir celle d'un multiple de cet entier...

… Soit ne rien y changer : un entier est un multiple de lui-même !

… Soit y introduire un entier premier supplémentaire - ou plusieurs.

Une application de l'étude des multiples à l'addition de fractions

À condition de savoir associer leurs chaînes aux dénominateurs de deux fractions que nous voulons ajouter, nous avons maintenant la réponse à la première question de ce chapitre : il existe un algorithme qui détermine le plus petit des dénominateurs communs à ces deux fractions (la plus petite de leurs « familles d'accueil »), et nous pouvons donc calculer efficacement la somme de ces fractions.

Nous nous contenterons d'un exemple, dont le principe sera applicable à toutes les fractions :

Niveau 3