

Précisons toutefois que $\sqrt{p}$ est avant tout l'écriture d'une *opération* (unaire) sur p , et qu'il est préférable, lorsque vous connaissez le résultat de cette opération, de l'écrire directement :

dans un calcul ou dans une conclusion, écrivez 5 plutôt que $\sqrt{25}$, 2,5 plutôt que $\sqrt{6,25}$,
sauf lorsqu'il vous paraît nécessaire d'insister sur la racine carrée.

D'où vient ce symbole ?

Il semble avoir été inventé par le mathématicien allemand Christoff Rudolff, vers 1525 : il serait alors une stylisation de la lettre " r " (du latin « *radix* » , pour « racine » ?)… mais les historiens des mathématiques sont loin d'en être tous d'accord.

Pourquoi « racine » ? Il faut vraisemblablement prendre ce mot dans le sens d'*origine* : à l'origine de l'aire d'un carré se trouve la longueur d'un côté de ce carré (5 serait donc « à l'origine de » 25).

Les nombres positifs ont-ils tous une racine carrée ?

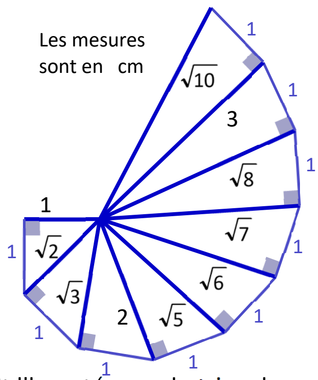
La réponse est oui, mais le démontrer dépasse de loin le cycle 4.
En revanche, il n'est pas très difficile de démontrer que tous les nombres rationnels positifs ont une racine carrée, en s'appuyant sur le théorème de Pythagore (dont vous trouverez la démonstration dans le second tome) :

⇳

soient A, B, C trois points de l'espace. Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Les nombres entiers positifs ont tous une racine carrée :

voici une construction géométrique (un algorithme) qui permet de construire facilement des segments dont les longueurs sont les racines carrées des nombres entiers successifs, à partir de 1.
On l'appelle le « colimaçon de Pythagore » - ou parfois, l'escargot de Pythagore :
il se fonde sur une répétition du théorème de ce mathématicien,
appliquée à une succession de triangles rectangles.



Les côtés de l'angle droit du premier triangle mesurent tous les deux 1 cm :
d'après le théorème de Pythagore, son hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ cm .
(Son carré vaut $1^2 + 1^2$, donc $1 + 1$, donc 2 !)

Le triangle suivant est construit de façon à ce que l'un des côtés de son angle droit soit l'hypoténuse du triangle précédent et l'autre côté, à l'extérieur du colimaçon, mesure encore 1 cm : son hypoténuse mesure alors $\sqrt{3}$ cm .
(Son carré vaut $1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$, donc $1 + 2$, donc 3 !)

Tous les triangles suivants sont construits sur le même modèle, les longueurs de leurs hypoténuses seront donc :
$\sqrt{4}$ (donc 2) , $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ (donc 3) , $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$ …

Niveau 2

Les nombres rationnels positifs ont donc tous une racine carrée :

Par exemple, $\sqrt{\dfrac{5}{11}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$, puisque $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \dfrac{5}{11}$ … Qui est bien le carré de $\sqrt{\dfrac{5}{11}}$!

Et les autres nombres positifs (les nombres réels irrationnels) ?

Mais déjà existent-ils ?

Vous rappelez-vous la conclusion du chapitre précédent («Une introduction à l'arithmétique ») ?

> **Et la deuxième question ?**
>
> Nous avons répondu à la première des deux questions qui ont ouvert ce chapitre :
> existe-t-il un algorithme pour déterminer la plus petite « famille » commune à deux fractions ?
>
> Mais qu'en est-il de la deuxième question : les points de la droite ont-ils tous une abscisse rationnelle ?
>
> L'arithmétique nous sera nécessaire pour y répondre. Nécessaire mais pas suffisante : nous nous appuierons également sur une nouvelle opération entre nombres rationnels, la « puissance ».
>
> Qui sera l'objet du chapitre suivant !

Nous allons enfin pouvoir vérifier qu'il existe des points d'une droite graduée dont l'abscisse n'est pas rationnelle.

Nous venons de le voir, il est possible de construire un segment de $\sqrt{2}$ cm. Donc, sur une demi-droite « positive » graduée en centimètres, le point situé à cette distance de l'origine aura bien comme abscisse $\sqrt{2}$.

Mais nous pouvons démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et voici *le principe* de cette démonstration (qui est tout à fait hors-programme, mais nous paraît suffisamment intéressante et compréhensible pour figurer ici) :

Hors - cycle

<u>Supposons</u> **que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel**. Alors, il existe deux entiers positifs, a et b , tels que : $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Ou, en passant aux carrés : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, c'est-à-dire $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$ ou encore : $a^2 = 2 \times b^2$.

Revenons maintenant à l'arithmétique : $a^2 = a \times a$ donc la « chaîne » de a^2 contient exactement tous les éléments de la « chaîne » de a , *<u>en double</u>* (si la « chaîne » de a était $3 \times 3 \times 7$, celle de a^2 serait $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$) … et il en est de même pour b !

Mais alors, la « chaîne » de $2 \times b^2$, qui contient juste *un* « 2 » de plus que celle de b^2, n'a plus tous ses éléments en double : elle ne peut donc pas être égale à la « chaîne » de a^2.

Autrement dit, **notre supposition n'est pas réaliste : $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel** !

(Et c'est bien sûr encore un exemple de raisonnement « par l'absurde » !)
Et comme ce raisonnement peut s'appliquer aux racines carrées de tous les nombres entiers qui ne sont pas des carrés parfaits, nous n'avons pas seulement montré que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : nous avons également montré que les racines carrées de beaucoup d'autres nombres entiers ne l'étaient pas non plus.

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés « nombres irrationnels », et les racines carrées n'en constituent qu'une partie !

Maintenant que nous savons qu'ils existent,
nous pouvons revenir à la question « les nombres irrationnels positifs ont-ils tous une racine carrée ? **»…** mais également, avec regret, à la première phrase de ce paragraphe sur les nombres réels positifs :

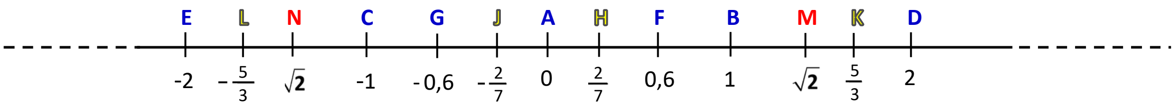
La réponse est oui, mais sa démonstration dépasse de loin le cycle 4 !

La question revient à : est-il possible de « zoomer » un carré de 1 cm de côté, et donc d'une aire de 1 cm², pour atteindre exactement un carré dont l'aire est un nombre que vous avez choisi ?

Hors - cycle

La « droite des réels » : l'univers envahissant des irrationnels

À chaque point d'une droite graduée correspond un nombre réel,
à chaque nombre réel correspond un point de cette droite.



Nous avons longuement étudié les réels rationnels et à peine effleuré les autres, les réels irrationnels : une étude approfondie des irrationnels serait évidemment déplacée dans un livre dédié cycle 4.

En revanche, il nous paraît utile, dès maintenant, de les situer par rapport aux rationnels :
sont-ils beaucoup moins nombreux, aussi nombreux, beaucoup plus nombreux ?
(Les quelques lignes suivantes ne seront malheureusement que des affirmations, indémontrables au cycle 4 !)

Observons une droite graduée.

Dans le but de simplifier les phrases qui suivent, « *point entier* », « *point décimal* », *etc.* signifiera « *point dont l'abscisse est entière* », « *point dont l'abscisse est décimale* », *etc.* : ce n'est évidemment qu'un abus de langage.

Imaginez que <u>chacun</u> des points - entiers, décimaux, fractions ou irrationnels - de cette droite contienne ce que nous avons appelé dans le livre « *… Donc, d'après…* » un *objet ponctuel* : un objet infiniment petit (non, ça n'existe pas) ! Bleu pour les décimaux - y compris les entiers, jaune pour les autres rationnels, rouge pour les irrationnels.

Imaginez encore que nous ayons le pouvoir de décolorer (« d'éteindre ») les points que nous choisissons.

Si nous décidons d'éteindre tous les points sauf les bleus, la droite paraîtra bleue… *sans trous visibles*.

Si nous éteignons tous les points sauf les jaunes, la droite paraîtra jaune… là encore, *sans trous visibles*.

Si nous éteignons tous les points saufs les bleus et les jaunes, la droite paraîtra verte… à nouveau, *sans trous visibles* (il y a autant de décimaux que de rationnels non décimaux… c'est étrange, mais démontrable !)

Si nous éteignons tous les points sauf les rouges, la droite paraîtra rouge… et toujours *sans trous visibles*.

Jusque-là, c'est assez compréhensible – à part, peut-être, cette absence de trous apparents.

Et si maintenant nous décidons de garder <u>tous les points</u> « allumés » ? La droite paraîtra aussi franchement rouge qu'à l'étape précédente. *Aucun trou*… et pourtant aucune trace apparente de bleu, de jaune ou de vert !

Chaque nombre rationnel est noyé parmi des milliards de nombres irrationnels !
(les irrationnels sont infiniment plus nombreux que les rationnels)