Triangles particuliers

T63 T-157 L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long de ses trois côtés.

T64 T-158 <u>« **Théorème de Pythagore** »</u> :

soient A, B, C trois points de l'espace.

Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

T65 T-160 **(*Parfois appelé - abusivement - contraposée du* « théorème de Pythagore »)** :

soient A, B, C trois points de l'espace.

Si [AC] est le plus long des segments limités par ces trois points et si AC^2 est différent de $AB^2 + BC^2$, alors ABC n'est pas un triangle rectangle.

T66 T-161 **Réciproque du « théorème de Pythagore »** :

soient A, B, C trois points de l'espace.

Si AC^2 est égal à $AB^2 + BC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en B.

T67 T-162 La médiatrice principale d'un triangle isocèle est un axe de symétrie de ce triangle.

Si ABC est un triangle isocèle en A, et *d* la médiatrice de [BC], l'image de ABC dans la symétrie d'axe *d* est ACB.

T68 T-163 La médiane principale, la hauteur principale et la bissectrice de l'angle principal d'un triangle isocèle ont toutes comme support la médiatrice principale de ce triangle.

T69 T-164 Les angles à la base d'un triangle isocèle ont le même écart angulaire.

T70 T-168 Si les angles en B et en C d'un triangle ABC ont le même écart angulaire,alors ce triangle est isocèle en A.

T71 T-174 Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60°.

T72 T-177 Les médiatrices des côtés et les droites-supports des médianes, des hauteurs et des bissectrices des angles d'un triangle équilatéral sont toutes concourantes.

T73 T-185 La longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le double de celle de la médiane associée à cette hypoténuse.

T74 T-186 Si la longueur d'un côté d'un triangle est le double de celle de la médiane associée à ce côté, alors ce triangle est rectangle (et le côté concerné en est l'hypoténuse).

Triangles et cercles

T75 T-144 Le point commun aux médiatrices des côtés d'un triangle est le centre de l'unique cercle circonscrit à ce triangle.

T76 T-147 Le point commun aux bissectrices d'un triangle est le centre de l'unique cercle inscrit dans ce triangle.

T77 T-183 L'hypoténuse d'un triangle rectangle est l'un des diamètres du cercle circonscrit à ce triangle.

T78 T-184 Si le cercle circonscrit à un triangle a comme diamètre l'un des côtés de ce triangle, alors ce triangle est rectangle (et le côté concerné en est l'hypoténuse).

Cercles, disques et polygones réguliers

T79 T-193 Si deux cercles coplanaires ont exactement deux points communs, la droite qui passe par leurs points communs est perpendiculaire à celle qui passe par leurs centres.

T80 T-188 Toute droite tangente à un cercle est perpendiculaire à la droite qui passe par le centre du cercle et par le point de tangence au cercle.

T81 T-182 L'écart angulaire d'un angle inscrit est la moitié de l'écart angulaire de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

T82 T-195 Les angles d'un polygone régulier ont tous le même écart angulaire.

T83 T-204 Quelle que soit l'unité de longueur choisie, le rapport $\frac{\text{périmètre d'un disque}}{\text{diamètre de ce disque}}$ est le même pour tous les disques.

Ou : le rapport du périmètre d'un disque au diamètre de ce disque est un nombre constant.

T84 T-205 L'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2 unités d'aire.

Le choix des théorèmes retenus est le résultat d'un travail collaboratif.

Géométrie plane : théorèmes à connaître en fin de 3ème.

*Les références en petits caractères renvoient au livre « **… Donc, d'après…** » de **Ph. Colliard** (https://www.donc-dapres.com), dont ces théorèmes sont extraits.*
Pour rester à un niveau raisonnable, nous avons toutefois choisi de considérer les « métaxiomes » du livre comme des théorèmes.

Segments

T1 T-8 **Propriété caractéristique des segments.**

Soient A, B et C trois points de l'espace : B appartient à [AC] **équivaut à** AB + BC = AC.

Droites

T2 M-1 Il passe exactement une droite par deux points distincts.

T3 M-8 Par un point, il passe exactement une droite parallèle à une droite donnée.

T4 M-9 Deux droites qui sont parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

T5 T-37 Soient une droite *d* et un point A, n'appartenant pas à *d* : par A, il passe exactement une droite perpendiculaire à *d*.

T6 T-40 Si deux droites sont parallèles, alors toute droite <u>**de leur plan**</u>, perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

T7 T-41 Si deux droites <u>**d'un même plan**</u> sont perpendiculaires à une troisième droite <u>**de ce plan**</u>, alors les deux premières droites sont parallèles.

Symétrie centrale

T8 T-10 Dans une symétrie centrale, la distance entre les images de deux points est la même que la distance entre ces deux points.

Ou : une symétrie centrale conserve les distances. Deux points distincts ont donc deux images distinctes !

T9 T-11 Dans une symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment, dont les extrémités sont les images des extrémités du segment de départ.

T10 T-17 Dans une symétrie centrale, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

T11 T-18 Dans une symétrie centrale, l'image d'un angle est un angle de même écart angulaire, dont les côtés sont les images des côtés de l'angle de départ.

T12 T-21 Dans une symétrie centrale, le seul point invariant est le centre de la symétrie.

T13 T-24 Dans une symétrie centrale, deux droites symétriques sont parallèles.

T14 T-20-plan Dans une symétrie centrale plane, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre du cercle d'origine.

Angles correspondants, angles alternes-internes

T15 T-9 Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure

T16 T-29 Si 2 droites sont parallèles, alors 2 angles alternes-internes déterminés par ces 2 droites et une sécante ont la même mesure (« sécante » : familier pour « droite sécante commune »).

T17 T-30 Si 2 angles alternes-internes déterminés par 2 droites et une sécante ont la même mesure, alors ces 2 droites sont parallèles (« sécante » : familier pour « droite sécante commune »).

T18 T-33 Si 2 droites sont parallèles, alors 2 angles correspondants déterminés par ces 2 droites et une sécante ont la même mesure. (« Sécante » : familier pour « droite sécante commune ».)

T19 T-34 Si 2 angles correspondants déterminés par 2 droites et une sécante ont la même mesure, alors ces 2 droites sont parallèles. (« Sécante » : familier pour « droite sécante commune ».)

Symétrie orthogonale (symétrie axiale)

T20 T-76 Soient A et B deux points distincts d'un plan P, et M le milieu de [AB].
L'ensemble des points **de P** équidistants de A et de B est la droite (de P !) perpendiculaire à (AB), en M : c'est également la droite commune à P et au plan médiateur de [AB].

T21 T-78 Dans une symétrie axiale, la distance entre les images de deux points est la même que la distance entre ces deux points.
Ou **:** une symétrie axiale conserve les distances. Deux points distincts ont donc deux images distinctes !

T22 T-79 Dans une symétrie axiale, l'image d'un segment est un segment, dont les extrémités sont les images des extrémités du segment de départ.

T23 T-84 Dans une symétrie axiale, l'image d'un angle est un angle de même écart angulaire, dont les côtés sont les images des côtés de l'angle de départ.

T24 T-86 Dans une symétrie axiale, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

T25 T-87 Dans une symétrie axiale, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre du cercle de départ.

T26 T-90 Le support de la bissectrice d'un angle est un axe de symétrie de cet angle.

Quadrilatères particuliers

T27 T-97 Le support de la diagonale principale d'un cerf-volant est un axe de symétrie de ce cerf-volant.

T28 T-101 Tout parallélogramme a un centre de symétrie (par rapport auquel ses sommets opposés sont symétriques).

T29 T-102 Tout quadrilatère non-croisé qui a un centre de symétrie est un parallélogramme.

T30 T-103 Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

T31 T-104 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

T32 T-105 Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

T33 T-106 Si les côtés opposés d'un quadrilatère non-croisé ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

T34 T-108 Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure.

T35 T-109 Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

T36 T-110 Si les angles consécutifs d'un quadrilatère sont supplémentaires, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

T37 T-111 Si les angles opposés d'un quadrilatère non-croisé ont la même mesure, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

T38 T-112 Si deux côtés opposés d'un quadrilatère non-croisé sont parallèles **et** ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

T39 T-114 Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

T40 T-119 Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

T41 T-126 Si les diagonales d'un losange ont la même longueur, alors ce losange est un carré.

T42 T-128 Si les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires, alors ce rectangle est un carré.

T43 T-133 L'aire d'un rectangle est le produit de deux côtés perpendiculaires.
(Abus de langage pour : l'aire d'un rectangle est le produit des longueurs de deux côtés perpendiculaires !)

T44 T-136 L'aire d'un parallélogramme est le produit d'un côté par la hauteur associée à ce côté. **(Abus de langage :** … de la longueur…)

Philippe Colliard Donc, d'après Licences Creative Commons : Attribution à l'auteur - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modifications

Triangles

T45 T-137 **« Inégalité triangulaire » :** la longueur d'un côté d'un triangle non dégénéré est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.
La longueur du plus grand des trois côtés d'un triangle dégénéré est égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

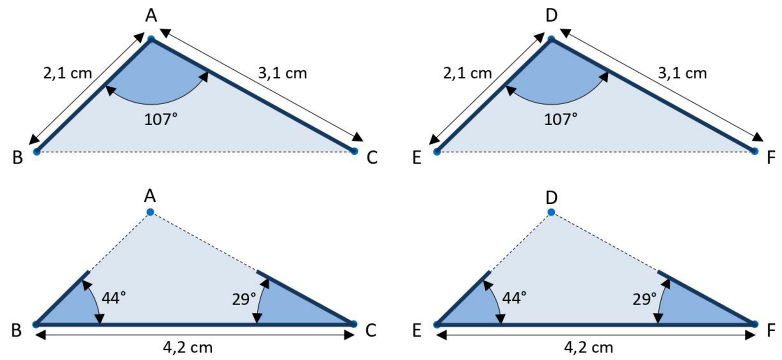
T46 M-14 Si deux triangles ABC et DEF sont tels que AB = DE, AC = DF et BC = EF, alors $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.
(Les écarts angulaires, pas des angles !!!)

T47 M-15 Deux triangles étant donnés,

Si un angle
et les deux côtés
qu'il relie,

ou

un côté
et les deux angles
qu'il relie,



ont les mêmes mesures dans les deux triangles, alors ces deux triangles sont isométriques.

« Relier » n'est pas vraiment un mot mathématique, mais il paraît clair :
un angle relie deux côtés lorsque ces deux côtés ont comme extrémité le sommet de l'angle,
et un côté relie deux angles lorsque ces deux angles ont comme sommets les extrémités de ce côté.

T48 T-35 La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.

T49 T-138 Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle au (support du) troisième côté.

T50 T-139 Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est la moitié de celle du troisième côté.

T51 T-140 Si une droite, parallèle à un côté d'un triangle, passe par le milieu d'un deuxième côté de ce triangle, alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.

T52 T-141 les médianes d'un triangle sont concourantes.

T53 T-143 Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

T54 T-145 La bissectrice d'un angle d'un triangle est l'ensemble des points de l'angle équidistants des (support des) côtés de cet angle.

T55 T-146 Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

T56 T-148 Les médiatrices des côtés d'un triangle sont les (support des) hauteurs de son triangle médian.

T57 T-149 Les (droites-support des) hauteurs d'un triangle sont concourantes.

T58 T-150 L'aire d'un triangle est le demi-produit d'un côté de ce triangle par la hauteur associée à ce côté. (… ***De la longueur*** d'un côté…)

T59 T-152 <u>**« Théorème de Thalès », première version**</u> **:**
si un ensemble de droites, toutes parallèles à un même côté d'un triangle, sépare un deuxième côté de ce triangle en des segments de même longueur, alors cet ensemble de droites sépare également le troisième côté en des segments de même longueur (différente, en général, de celle des premiers segments).

T60 T-153 <u>**« Théorème de Thalès », deuxième version, forme simplifiée**</u> **:**
soient un triangle ABC (non dégénéré), un point D de [AB] et un point E de [AC].
Si (DE) est parallèle à (BC), alors les trois rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{DE}{BC}$ sont égaux.

T61 T-154 <u>**« Théorème de Thalès »**</u> **:**
soient cinq points distincts, A, B, C,D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A.
Si (BC) et (DE) sont parallèles, alors les rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{DE}{BC}$ sont égaux.

T62 T-156 <u>***(Souvent appelé** - abusivement -* ***réciproque du** **« théorème de Thalès »)***</u> **:**
soient cinq points distincts, A, B, C,D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A.
Si A est à la fois un point de [BD] et un point de [CE], ou s'il n'est ni un point de l'un ni un point de l'autre,
(tu liras souvent : « si A, B, D sont dans le même ordre que A, C, E ». Mais qu'est-ce qu'un ordre entre points de droites sécantes ?)
et si les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$ sont égaux, alors (BC) et (DE) sont parallèles.