Au collège, l'une des difficultés de la géométrie provient du flou qui entoure le vocabulaire utilisé.

Je souhaite depuis bien longtemps participer à une harmonisation de ce vocabulaire, et il m'a semblé que partager la 1ère partie de «… Donc, d'après… » (sous licence « Creative Commons ») irait dans ce sens.

Les bases de la géométrie que j'y ai construites, en 7 « voyages » et environ 80 pages, sont cohérentes et raisonnablement efficaces : je les ai utilisées en classe durant de (très) nombreuses années et celles et ceux de mes collègues qui les utilisent à leur tour en semblent satisfait(e)s.

Je ne prétends toutefois pas détenir « la » vérité, d'autres bases sont évidemment possibles et cohérentes. Je me contente d'apporter une pierre à l'édifice.

N'hésitez pas – si vous le souhaitez – à commenter les pages qui suivent sur le site des éditions mathemagique.com,
avec, comme objet de votre mail : Donc d'après – base de la base.

Philippe Colliard

Le site du livre

https://donc-dapres.com https://www.donc-dapres.com

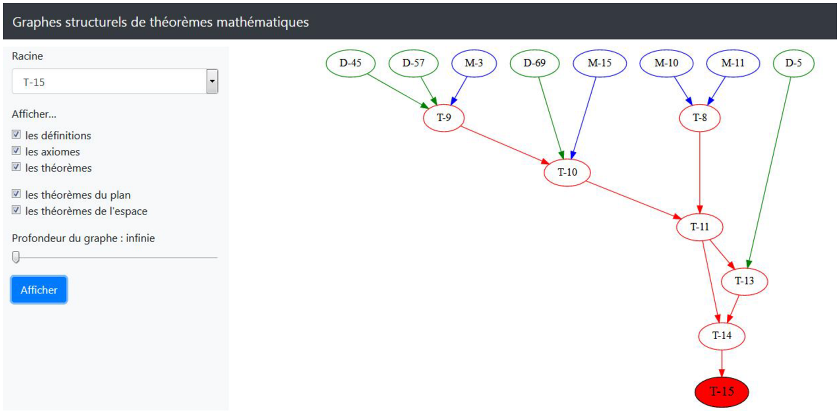
Les visiteurs y trouveront quelques compléments à « … Donc, d'après… », et tout particulièrement une application informatique extrêmement puissante au service de ce livre : « **les graphes des théorèmes** ».

À l'aide de cette application, ils pourront enfin visualiser la généalogie de chacun des théorèmes étudiés, en remontant à volonté du premier rang (les parents) à un rang de leur choix, voire à la base axiomatique de la construction :

quels sont les parents (métaxiomes, théorèmes, définitions) de ce théorème ?

Quels sont ses grands-parents ? Ses arrière-grands-parents ?…

Il s'agit d'un outil extraordinaire pour les amateurs passionnés qui peuvent ainsi remonter toute une construction axiomatique jusqu'à ses axiomes et pour les professeurs qui peuvent situer chaque théorème dans un contexte et délimiter un cadre raisonnable (1, 2 ou 3 rangs) à son étude.



T-15 Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite.

ISBN : 978-2-9545-7284-0

Éditions mathemagique.com
15 rue du pont, 80800 Hamelet
www.mathemagique.com

Édition 2019

... Donc, d'après...

Une construction axiomatique de la géométrie au collège,

à l'usage des élèves (et de leurs parents), des professeurs,

et des autres personnes que cela pourrait intéresser !

Philippe Colliard

Personnages de Lauréline Colliard

Éditions
mathemagique.com

Avant-propos

Lors de la première édition de ce livre, j’ai commis l’erreur de ne pas suffisamment en préciser le cadre, et cela m’a valu plusieurs critiques sévères. À l’usage – et après quelques mises au point – les critiques se sont calmées mais il ne me semble pas inutile, dans cette nouvelle édition, de revenir sur cette discussion.

De l’axiomatique au collège ?

Non : de l’axiomatique ***pour*** le collège.

Idéalement, «… *Donc, d’après…* » pourrait être à la géométrie dans le secondaire ce que les « Bescherelle » y sont à la grammaire française. Personne ne connaît les « Bescherelle » par cœur, en revanche lorsque vous avez besoin d’eux, vous savez qu’ils sont là.

Je n'ai jamais pensé que nous, professeurs, devions enseigner à nos élèves les quelques 200 théorèmes – avec leurs démonstrations – et les quelques 150 définitions contenus dans les pages suivantes : je souhaite simplement encourager le lecteur à construire des raisonnements, en partant d'un ensemble raisonnable d'affirmations de départ. L’encourager à construire au cours de l'année *quelques parcelles* de la géométrie du collège à partir d'une axiomatique simplifiée, accessible à des utilisateurs de ce niveau. Une dizaine de théorèmes peut-être, bien choisis.

Il me semble que de plus en plus fréquemment, cette géométrie du collège dérive vers une simple technique d'application, que les théorèmes - toujours les mêmes - ne deviennent plus que des outils livrés « clés en main », des sortes de boîtes noires dont le champ d'application lui-même se recroqueville.
Et cela me désole, parce que la force de la géométrie, la vraie force de la géométrie au collège, peut être de donner aux élèves le goût du raisonnement - de les amener à se rassurer sur eux-mêmes, à découvrir qu'ils **savent** raisonner. Oui, tous.
Puis d'apprendre à la majorité d'entre eux à affiner, à maîtriser cette capacité de raisonnement.

La base axiomatique de «… *Donc, d’après…* » :

Parce que je voulais cette construction accessible à des collégiens, j'ai pris des libertés avec l'axiomatique de **David Hilbert**, qui se retrouve toutefois constamment en toile de fond de ma construction. En pratique, j'ai élargi sa base axiomatique en imaginant des « définitions et axiomes physiques » pour aider les collégiens à appréhender trois éléments de base : le point, la droite, le plan (en régissant les interactions entre objets mathématiques, les axiomes de **Hilbert** – tout comme ceux d’**Euclide** – ne déterminent qu’*en creux* ce que seront ces trois éléments de base).

Pour construire ces définitions et axiomes physiques, je suis parti d’objets physiques « idéaux » associés au point, à la droite, au plan, à notre espace : des objets (ponctuels, linéaires, surfaciques ou volumiques) que j'imagine matériels mais sans masse, parfaitement rigides mais déformables sans contraction lorsque c'est nécessaire.

Ces objets idéaux n'existent évidemment pas dans notre univers physique (entre autres impossibilités, un objet parfaitement rigide transmettrait des informations instantanément). Ils apparaissent progressivement dans le livre, au fil de l'eau : en premier l'objet ponctuel – dont l'introduction tient plus de la magie que de la géométrie ! – puis petit à petit, les fils, feuilles ou blocs. Tous font d'abord l'objet de définitions physiques (pour autant qu'un objet imaginaire puisse être considéré comme physique) puis sont régis par des axiomes physiques.

Ces axiomes physiques ne sont que l'ensemble des comportements que j'ai dû imposer à ces objets physiques idéaux pour illustrer les axiomes mathématiques : ils m'ont permis, au prix de quelques redondances, d'expliciter les éléments de base que les axiomatiques d'**Euclide** ou de **Hilbert** manipulent mais ne définissent pas… et d'en donner une approche plus accessible à des collégiens.

Ce livre ne propose donc pas une construction pure de la géométrie, mais une construction aussi proche de la pureté que cela me semble être raisonnable pour des élèves de collège : elle repose sur 24 *métaxiomes* – 8 physiques et 16 mathématiques – qui tentent de traduire l'esprit des 20 éléments de la base axiomatique de **Hilbert**.

Des « *métaxiomes* » ?

Ne voulant pas galvauder le mot « axiome », j'ai créé ce néologisme pour nommer les affirmations sur lesquelles repose ma construction, sans chercher à distinguer entre les axiomes originels et les greffons pédagogiques. Pourquoi « métaxiomes » ? Par analogie avec les instructions des métalangages informatiques, construites à partir d'instructions de bas niveau... et qui deviennent à leur tour le bas niveau de ces métalangages.

Les axiomes de David Hilbert :

Bien qu'il ne soit nullement nécessaire à la compréhension de ce livre, cet aperçu d'une axiomatique pure de la géométrie d'**Euclide** me semble avoir toute sa place dans cet avant-propos, ne serait-ce que par curiosité.

Les personnes intéressées trouveront également sur le *site du livre* , rubrique « *compléments* », différentes écritures de la première grande axiomatique, celle d'**Euclide**… mais également deux axiomatiques très récentes – et très différentes – de la même géométrie, rédigées par **Gustave Choquet**, que j'ai eu le bonheur d'avoir comme professeur au début de mes études.

Référence : réimpression, par **les éditions Jacques Gabay**, d'une édition critique de l'ouvrage « **Les Fondements de la Géométrie, par David HILBERT** » (« **Grundlagen der Geometrie** », traduction par **B.G. Teubner Verlag**), avec introduction et compléments, préparée par Paul **ROSSIER**, professeur honoraire à l'université de Genève et publiée chez **Dunod**, Paris, en 1971, avec le concours du **C.N.R.S**.

*À l'exception des remarques en italique, qui sont de moi, la compilation suivante est composée de textes de **David Hilbert**, extraits de l'ouvrage cité en référence, qui s'appuie lui-même sur la 10e édition de ses « Fondements de la Géométrie » : la première édition remonte à 1899, la 10ème date de 1968, avec de nombreuses modifications !*

Premier groupe d'axiomes : appartenance.

Les axiomes de ce groupe expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan.

(I, 1) Il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces deux points.

(I, 2) Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B.

Ici comme plus bas, par deux, trois, … points, droites ou plans respectivement,
nous entendons toujours des points, droites ou plans différents.

(I, 3) Sur une droite, il y a au moins deux points ; il existe au moins trois points non-alignés.

(I, 4) Il existe un plan α lié à trois points non-alignés A, B, C auquel appartiennent ces trois points A, B, C.

(I, 5) Il n'existe pas plus d'un plan auquel appartiennent trois points non-alignés A, B, C.

(I, 6) Si deux points A, B d'une droite *a* appartiennent à un plan α tous les points de la droite appartiennent à ce plan α.

(I, 7) Si deux plans α et β ont un point A commun, ils en ont encore au moins un autre B.

(I, 8) Il existe au moins quatre points non coplanaires.

Deuxième groupe d'axiomes : ordre.

Les axiomes de ce groupe définissent le terme « entre » ; si l'on s'appuie sur la relation ainsi déterminée, ils permettent d'établir l'ordre des points alignés, coplanaires ou situés dans l'espace.

(II, 1) Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B C, appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.

(II, 2) Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.

(II, 3) De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

En plus de ces axiomes linéaires de l'ordre, nous aurons besoin d'un axiome plan de l'ordre.

(II, 4) Soient A, B et C trois points non-alignés et *a* une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite *a* passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC.

M. **PASCH**, le premier, a étudié ces axiomes de façon détaillée dans son ouvrage ***Vorlesungen über neuere Geometrie***. L'axiome (II, 4) lui est dû.

Troisième groupe d'axiomes : congruence.

Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence et, par là, celle de déplacement.

(III, 1) Si A et B sont deux points d'une droite *a* et A' un point de cette droite ou d'une autre droite *a*' :
sur *a*', d'un côté donné de A', on peut trouver un point B' tel que le segment AB soit congruent (ou égal) au segment A'B';
nous écrivons cette relation AB $\equiv$ A'B'.

(III, 2) Si un segment A'B' et un segment A''B'' sont congruents à un même segment AB,
le segment A'B' est congruent au segment A''B'' ;
en bref, si deux segments sont congruents à un troisième, ils sont congruents entre eux.

(III, 3) Soient AB et BC deux segments sans points communs portés par la droite *a* d'une part,
A'B' et B'C' deux segments de la droite *a*' aussi sans points communs ;
si AB $\equiv$ A'B' et BC $\equiv$ B'C', alors AC $\equiv$ A'C'.

Le report des angles est traité exactement comme celui des segments.
En plus de la possibilité du report, son univocité doit être posée axiomatiquement ; la transitivité et l'additivité sont démontrables.

Note : avant les énoncés des axiomes suivants, Hilbert définit un angle comme l'ensemble formé de deux demi-droites h et k d'un plan α, issues d'un point O, différentes et appartenant à des droites différentes.
Il désigne cet angle par $\measuredangle$ (h,k), ou par $\measuredangle$ (k,h).
Il définit ensuite l'intérieur de l'angle comme la partie convexe de α , limitée par h et k (mais il le dit différemment !)

(III, 4) Soient un angle (h,k) d'un plan α et une droite *a*' d'un plan α' ainsi qu'un côté donné de *a*' de α'.
Désignons par h' une demi-droite portée par *a*' issue du point O'.
Dans le plan α' il existe une unique demi-droite k' telle que l'angle (h,k) est congruent, ou égal, à l'angle (h',k') et dont l'intérieur est du côté donné de la droite *a*'.
En résumé, $\measuredangle$ (h,k) $\equiv$ $\measuredangle$ (h',k').

Tout angle est congruent à lui-même, autrement dit : $\measuredangle$ (h,k) $\equiv$ $\measuredangle$ (h,k) et $\measuredangle$ (h,k) $\equiv$ $\measuredangle$ (k,h).

(III, 5) Si dans deux triangles ABC et A'B'C' les congruences suivantes sont satisfaites :
AB = A'B' , AC = A'C' , $\measuredangle$ BAC $\equiv$ $\measuredangle$ B'A'C' , la congruence $\measuredangle$ ABC $\equiv$ $\measuredangle$ A'B'C' l'est aussi.

Quatrième groupe d'axiomes : parallèles.

Note 1: avant l'énoncé de l'axiome suivant, Hilbert démontre que si a est une droite d'un plan α, et A est un point de ce même plan, mais n'appartenant pas à a, il est possible de déterminer dans le plan α une droite qui contient A et qui ne coupe pas a. Il définit alors deux droites parallèles comme deux droites coplanaires qui ne se coupent pas.

Note 2: oui, il n'y a bien qu'un seul axiome dans ce « groupe » !

L'axiome des parallèles a la teneur suivante :

(IV) **Axiome d'Euclide.**
Soient une droite *a* et un point A extérieur à *a* :
dans le plan déterminé par *a* et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas *a*.
Il résulte de ce qui précède et de l'axiome des parallèles que, par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Cinquième groupe d'axiomes : continuité.

(V, 1) **Axiome de la mesure, ou d'Archimède.**

Si AB et CD sont deux segments quelconques,
il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.

(V, 2) **Axiome de l'intégrité linéaire.**

L'ensemble des points d'une droite, soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduite des axiomes (I) à (III) et de l'axiome (V,1).

Une conséquence essentielle de l'axiome d'intégrité linéaire est le fait général suivant :

Théorème 32 : théorème de l'intégrité.

Les éléments de la géométrie (les points, les droites et plans) constituent un ensemble qui n'est susceptible d'aucune extension si les axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède sont conservés.

Note : l'axiome d'intégrité n'apparaît pas dans la première édition des « fondements de la géométrie ».
Hilbert disait de lui :

« la valeur de cet axiome, au point de vue des principes, tient donc à ce que l'existence de tous les points limites en est une conséquence et que, par suite, cet axiome rend possible la correspondance univoque et réversible des points d'une droite et de tous les nombres réels.
D'ailleurs, dans le cours des présentes recherches, nous ne nous sommes servis nulle part de cet « axiome d'intégrité ».

Cet axiome apparaît également sous le nom d'axiome « de complétude », ou axiome de ***CANTOR*** *(ou de* ***CANTOR - DEDEKIND****)*
avec un énoncé différent - s'appuyant sur le principe des coupures de ***DEDEKIND*** *- exprimant que toute suite de segments emboîtés dont la longueur « tend vers 0 » converge en un point limite.*

Permettez-moi de revenir un instant à l'axiomatique que j'ai tenté de construire :

pourquoi l'axiome d'intégrité n'y apparaît-il sous aucune forme ?

Ce n'est à l'évidence pas pour « faire comme Hilbert » (il est un soleil, je suis une bougie) : très simplement, il ne me semblait pas avoir sa place dans un ouvrage qui ne fait qu'effleurer, avec beaucoup de retenue, la notion de nombres réels.
Cependant, une fois cet axiome accepté, tous les théorèmes que j'ai démontrés dans le cadre de mesures rationnelles s'étendent très naturellement à des mesures irrationnelles.

Tu ?

Le plus simple pour moi est de céder la parole à **Olivier Leguay,** auteur d'un blog magnifique :
Inclass@blɛs Mathématiqu€s 2.0 (http://www.inclassablesmathematiques.fr/).

Voici donc l'introduction de l'article qu'il a consacré à «… Donc, d'après…», à la sortie de sa première édition :

Philippe Colliard a passé beaucoup de temps pour penser et écrire cette géométrie qu'il explique au lecteur, supposé être un collégien et qu'il tutoie dès le début du livre. Ce n'est pas le tutoiement de celui qui sait devant l'ignorant, mais plutôt de l'ami qui t'emmène par la main pour te montrer un chemin que tu ne pourrais pas parcourir tout seul, par peur, par ignorance de son existence ou par manque de forces.

"*J'écris ce livre pour toi, et j'essaierai de ne pas te décevoir*". La tâche est rude car le chemin de la construction axiomatique de la géométrie l'est, mais il est impensable que l'auteur marche seul loin devant, sans que celui qui souhaite comprendre reste à ses côtés et puisse répondre aux délicates questions: Qu'est-ce qu'un point? Qu'est-ce qu'une droite? Qu'est-ce qu'un plan? et toutes les autres qui en découlent.

Non, non "*Ce n'est pas un roman*". " *Fil après fil, [le livre] tisse devant toi chacun des éléments de ta géométrie: chaque ensemble de points, chaque théorème, chaque transformation.*"

Alors, comme Clairaut qui souhaitait placer le "Commençan" sur les traces du "découvreur" à travers la résolution de problèmes pour aborder l'univers mathématique, Philippe Colliard adopte une démarche analogue pour entrer en Géométrie par la porte axiomatique. L'apprenant tutoyé est celui qui va suivre le chemin du "découvreur" sans se faire abandonner ni manipuler en cours de route. Se faire abandonner car la pente serait trop rude et se faire manipuler par des tours de passe-passe rhétoriques ou des raisonnements évités pour poursuivre plus loin, au lieu d'expliquer le fondement…

(L'intégralité de l'article est ici :
http://www.inclassablesmathematiques.fr/archive/2013/12/01/donc-d-apres-un-excellent-livre-de-philippe-colliard-mathem-5235316.html
Il est également accessible par le site du livre , rubrique « commentaires »)

Je ne l'aurais jamais exprimé aussi bien et je suis très heureux de pouvoir le remercier ici.

Introduction

Si…

Si tu aimes réfléchir, comprendre - et peu importe si, pour l'instant, tu es, ou non, «bon(ne) en maths»...
S'il t'arrive de te poser des questions étranges (*mais c'est QUOI, une droite ???*), alors, bienvenue.

J'écris ce livre pour toi, et j'essaierai de ne pas te décevoir !

Mais peut-être penses-tu que tu n'aimes pas réfléchir ? Ou que tu n'en es pas capable ? Et si, avant de refermer définitivement ce livre, tu essayais tout de même d'en lire quelques pages ? Au moins les premières, juste pour voir ? Tu essaies ?

Le collège et la géométrie.

Un des buts de la géométrie du collège est de te familiariser avec quelques ensembles de points :
des lignes simples, des surfaces limitées par ces lignes, des « solides » limités à leur tour par ces surfaces…

Un autre but de cette géométrie est de te fournir des outils pour étudier ces ensembles de points : des théorèmes et des transformations. Un théorème est une affirmation dont tu peux démontrer - en t'appuyant sur d'autres théorèmes, bien souvent - qu'elle est vraie ; une transformation te permet d'associer un ensemble de points à un autre (pourquoi « transformation » ? Parce que tu considères le nouvel ensemble comme une image - déformée - du premier).

Ces outils te permettent de découvrir de nombreuses propriétés de ces ensembles de points, et de déterminer, par des raisonnements (et quelques calculs) plusieurs sortes de mesures : des mesures d'angles, les longueurs de certaines lignes, les aires de certaines surfaces, les volumes de certains solides.

Que fait ce livre ?

Fil après fil, il tisse devant toi chacun des éléments de ta géométrie : chaque ensemble de points, chaque théorème, chaque transformation. Il les définit, il les construit tous. Il les relie les uns aux autres, en essayant de n'escamoter aucun des liens entre un élément et ses prédécesseurs ou ses successeurs.

Ce n'est pas un roman, bien sûr, et ce serait une très mauvaise idée de vouloir le lire en entier ! Mais peut-être pourrais-tu prendre plaisir à en lire de petits bouts, des morceaux choisis… et même à les relire.

Partie 1 : la base de la base

Sept voyages au cœur des premiers mots de la géométrie

Pour un mathématicien, la géométrie repose sur 3 éléments de base : point, droite et plan.

« De base » veut dire qu'on ne les définit pas, on se contente de leur imposer des comportements.

Si je ne peux pas les définir, je peux t'aider à les concevoir : plus ta vision d'un point, d'une droite ou d'un plan sera claire, plus la géométrie te paraîtra simple. Bien souvent, lorsque tu ne raisonnes pas juste, c'est parce que tu ne vois pas juste. Heureusement, ta vision s'éduque avec ton expérience, avec tes connaissances !

D'où l'idée de ces sept voyages… Mais les voyages, ça se prépare, alors :

Avant le(s) départ(s) : Qu'est-ce qu'un raisonnement ?

Raisonner, c'est enchaîner - en respectant un jeu de « lois logiques » - des certitudes élémentaires.

Une certitude élémentaire ressemble fréquemment à :

« je suis dans telle situation, donc j'ai telle conséquence »,

ou, plus généralement : « telle situation engendre telle conséquence ».

(Fréquemment seulement, mais ça suffira pour un début !)

Naturellement, ta certitude élémentaire n'est utilisable que :

si tu es bien dans la situation dans laquelle tu crois être,

et si tu es effectivement certain(e) de ce que tu affirmes !

« J'ai couru trop longtemps donc je suis fatigué »,

« si le Soleil s'éteint, alors la Terre deviendra glaciale (rassure-toi, ce n'est pas pour tout de suite !) »,

« si je lis tout ce livre, alors... non, rien, tu verras bien ! » ☺

Comme une grande partie de ce livre manipule des raisonnements, prends le temps, maintenant, de jeter un coup d'œil à quelques mots incontournables, au cœur de la logique mathématique.

Comme je le ferai bientôt pour les définitions géométriques, je vais donner un numéro à chacune de ces définitions logiques, et ces numéros - précédés des lettres «$\mathbf{D}_{\log}$» te permettront de les identifier, si nécessaire, tout au long de ce livre. Ce seront leurs noms.

Des mots qui reviendront souvent :

D$_{\text{log}}$ -1 ***Affirmation*** : toute phrase qui n'est ni une question, ni un ordre.
Une affirmation peut être vraie ou fausse !

D$_{\text{log}}$ -2 ***Prouver*** **ou** ***démontrer*** : en partant d'une situation, enchaîner des certitudes bien choisies pour arriver à la conséquence que l'on voulait atteindre.

D$_{\text{log}}$ -3 ***Axiome*** : une affirmation dont personne ne peut démontrer ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse.
La notion d'axiome est quelque chose de fantastique :
les axiomes sont à l'origine de tous les raisonnements.

D$_{\text{log}}$ -4 ***Propriété*** : une affirmation dont on a démontré qu'elle était vraie.

D$_{\text{log}}$ -5 ***Théorème*** : une propriété qui paraît suffisamment intéressante pour mériter ce nom.

Comment démontres-tu une propriété ?

En enchaînant des certitudes… Mais que sont ces certitudes mathématiques que tu peux enchaîner ?
D'après D$_{\text{log}}$-4, des propriétés que tu as déjà démontrées ! Et ces propriétés-là, comment les as-tu démontrées ? En t'appuyant sur d'autres propriétés, démontrées avant celles-là !

On reprend ? Pour démontrer une propriété, tu utilises des propriétés démontrées plus tôt, qui, elles-mêmes, utilisent des propriétés démontrées encore plus tôt, qui, à leur tour... quand est-ce que ça s'arrête ? Où sont les premières propriétés, les premiers maillons des chaînes de raisonnement ?

Si tu y réfléchis, tu te rends rapidement compte qu'un premier maillon ne peut pas être une propriété : une propriété doit être démontrée, et pour la démontrer, tu utilises d'autres propriétés.

Un premier maillon doit donc être une affirmation non démontrable : si tu pouvais démontrer que cette affirmation est fausse, elle n'aurait pas beaucoup d'intérêt... et si tu pouvais démontrer qu'elle est vraie, ce serait une propriété, qui s'appuierait sur d'autres propriétés - des maillons antérieurs !

Ce sont ces affirmations non démontrables, ces premiers maillons que les mathématiciens appellent des « axiomes » - rien qu'en géométrie, il y en a une vingtaine.
Et je vois bien que tu veux un exemple. D'accord, c'est parti !

Un axiome :

Si A et B sont deux points distincts, alors il existe une droite unique qui passe par A et B.

Les mathématiciens notent cette droite (AB)… Et je simplifie un peu, parce qu'en réalité, il s'agit de deux axiomes différents : le premier décide qu'il existe une droite qui passe par A et B, et le deuxième que cette droite est unique.

Évident, non ? ... Mais personne ne peut le démontrer !

J'étais sûr que tu dirais ça !
Ça ne se voit pas du tout
(d'ailleurs, personne ne peut voir une droite).
Ça te paraît évident parce que...
Bon, la vérité,
c'est qu'on t'a conditionnée à le trouver évident !

Un autre axiome :

Si A , B et C sont trois points distincts,
alors il existe une droite unique qui passe par A et qui est parallèle à (BC).

Des mathématiciens très sérieux se sont « amusés » à voir ce qui se passait si on décidait qu'aucune droite parallèle à (BC) ne passait par A... ou, si on décidait au contraire que plusieurs droites distinctes et parallèles à (BC) passaient par A !

Et ils ont découvert que ça ne les empêchait pas du tout de construire des géométries tout à fait logiques et rigoureuses - aussi logiques et rigoureuses que celle que tu étudies et qu'on appelle la « géométrie d'Euclide ». Simplement, elles correspondent à des visions différentes de l'univers - des visions qui ne correspondent pas à notre monde familier (mais pas parce qu'elles sont fausses : j'imagine que l'une de ces géométries correspondrait à la vision qu'aurait un électron de notre univers, s'il avait des yeux).

Axiomes et métaxiomes :

Il existe plusieurs « jeux d'axiomes » qui permettent de construire la géométrie que tu utilises. À ma connaissance, le plus ancien est celui proposé par Euclide - il y a environ 2300 ans.
Et tu ferais bien d'aller jeter un coup d'œil à sa biographie, sur Wikipedia, par exemple. Ta géométrie ne s'appelle pas « géométrie euclidienne » par hasard...

Mais le « jeu d'axiomes » sur lequel je m'appuie est un peu plus récent : c'est celui de Hilbert, et il n'a qu'une centaine d'années. Un jeunot ! (Et là encore, Wikipédia ... ☺)

Que ce soit pour la construction des nombres, ou pour la géométrie, ou encore pour la logique que tu utilises, je remonterai fréquemment aux axiomes eux-mêmes... mais pas toujours : ils sont à l'origine de tous les raisonnements mathématiques, mais tu n'as pas encore la culture ou la réflexion nécessaire pour comprendre leur utilité (non, ce n'est pas une critique - patience, un jour, tu en sauras plus que moi).

J'ai donc décidé de m'appuyer sur un jeu personnel d'affirmations, dont certaines sont de vrais axiomes mais dont d'autres sont démontrables (à partir de « vrais » axiomes) - et qui, toutes, devraient te paraître évidentes.

Je les appelle des « métaxiomes ». Le tout premier est un métaxiome physique : il fera son entrée en scène dans quelques pages, et il me semble tellement antérieur aux autres que je lui ai attribué le numéro « 0 » - et il lui correspondra d'ailleurs, dans quelques temps, une « D_{phy}-0 » (habituellement, je numérote à partir de « 1 ») !

(Tu trouveras dans les annexes le jeu complet des métaxiomes... et sur le site du livre , rubrique « *compléments* » le jeu des axiomes d'Euclide et celui des axiomes de Hilbert - juste pour le plaisir !)

Premier voyage

en 3 croisières et quelques escales

Objet ***Endroit*** ***Objet ponctuel*** ***Point*** ***Ensemble*** ***Élément*** ***Paire*** ***Autant*** ***Ligne*** ***Trait***

Pour te préparer à ce voyage, voici une devinette. Elle porte sur des segments de droite et - juste le temps de cette devinette - je vais faire comme si tu savais vraiment ce qu'est un segment. D'ailleurs, tu le sais peut-être... mais si, pour toi, un segment est simplement un « trait droit », alors le « bon sens » te soufflera une réponse fausse. Parce que le «bon sens» a besoin de connaissances exactes pour être vraiment bon : après tout, pendant très longtemps, le «bon sens» a dit que le soleil tournait autour de la Terre.

Allez, c'est parti ! Non, attends encore un peu. Cette devinette, je voudrais pouvoir l'écrire - et la dessiner - proprement. Alors, voici un (bref) rappel des codes de vocabulaire et de dessin que je vais utiliser ici... et que tu connais sûrement déjà !

La géométrie a sa langue. On dirait du français… Mais ça n’en est pas !

Si A est le nom que j'ai donné à un point, A se lit « point A »… Ou « point grand A ».

En maths, « grand » veut souvent dire « majuscule » (et « petit » veut dire minuscule) :
même si ce n’est pas du tout une obligation, les points ont très souvent comme noms des lettres majuscules.

(AB) se lit « droite A B »... et ne définit une droite que si $A \neq B$.

[AB] se lit « segment A B ».
Si $A \neq B$, c’est une partie de (AB), composée de A, de B et des points de (AB) situés entre A et B.
Et si A = B, tu peux encore te dire que c'est une partie d'une droite... une partie qui ne contient qu’un point ☺.

La géométrie a ses codes. On dirait du dessin… Mais ça n’en est pas !

Quand tu veux représenter un point, tu traces
(en général, mais ce n’est pas une obligation)
2 traits qui se croisent en ce point.

Le point M

Il m’arrivera aussi de représenter un point par une tache, plus ou moins grosse,
selon l’importance que je donne à ce point
(mais tu verras bientôt qu’un point n’a pas de grosseur).

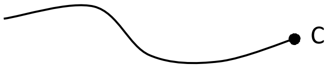
Quand tu veux représenter une ligne,
tu traces un trait. Comme ceci :

Si tu veux indiquer que cette ligne est illimitée (ne « s'arrête pas »), tu dois arrêter ton trait « dans le vide », c'est-à-dire que tu ne dois pas l'arrêter contre un autre trait ou contre un point : la ligne que j'ai représentée juste avant est donc illimitée… Mais je ne sais pas comment elle continue !

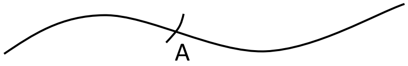
Si tu veux indiquer que la ligne est limitée par un point (s'arrête en un point), ton trait doit s'arrêter contre un autre trait, qui passe par ce point - ou contre un « point-tache » :

Cette ligne « s'arrête en B » :
ou : B est une extrémité de cette ligne …

… Et celle-ci en C :



Cette ligne passe par le point A,
mais elle ne s'y arrête pas :



Ici, tu dessines une (ligne) droite :

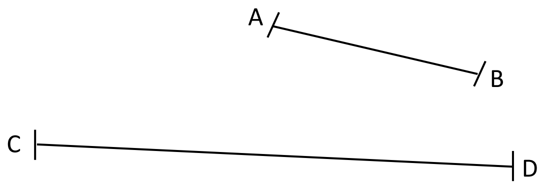
Ici, une demi-droite :

Et là, un segment (de droite) :

Mais qu'est-ce qu'un point, une ligne, une droite, une demi-droite, un segment ? Qu'est-ce qu'un trait ? Patience, je t'en reparlerai… Après la devinette ☺.

Bon, maintenant, je peux commencer ! Tu es prêt ?

Regarde ces deux segments, là… [AB] et [CD] :



Question : lequel a le plus de points ?

Réponse : ils ont autant de points tous les deux !

Mais ne pense pas « c'est évident, parce qu'ils ont une infinité de points »,
ce n'est **<u>pas</u>** la bonne raison : il n'y a pas autant de nombres dans l'ensemble des nombres entiers que de points dans un segment… et pourtant, l'ensemble des nombres entiers contient une infinité de nombres.

Derrière cette question - et sa réponse - se cachent un tas de concepts fondamentaux pour que la géométrie te devienne simple. Et pas seulement la géométrie ! Mais ne cherche pas, ces concepts ne sont pas « au programme ». Et pourtant, je ne sais vraiment pas comment je pourrais te guider à travers les maths sans commencer par t'en parler un peu !

En vrac, quelques-uns de ces concepts fondamentaux :

qu'est-ce qu'un segment ?

... ce qui t'amène immédiatement à la question : qu'est-ce qu'une droite ?

... et plus généralement, à : qu'est-ce qu'une ligne ?

... et finalement, à la question de fond : **qu'est-ce qu'un point ?**

Que signifie « autant » ?

Le point est à la base de tout ce que tu apprends en géométrie, alors ce serait bien que tu aies une idée plutôt précise de ce que c'est !

Et « autant » est à la base de tout ce que tu apprends sur les nombres, alors...

Eh, oh, Monsieur...
Et la différence
entre une ligne et un trait, alors ?

Ooops, j'avais oublié, c'est vrai.
Bon, je t'en parlerai aussi ☺ !

Et quand on aura parlé de tout ça, tous les deux, tu sauras vraiment pourquoi les deux segments ont autant de points (et tu pourras frimer... mais ce n'est pas le but) !

Bon, je t'offre 2 croisières inoubliables... Et même une 3ème croisière bonus !
Tu embarques ?

<u>Première croisière</u> : le point.

<u>Première escale</u> : qu'est-ce qu'**un objet physique ?**

Tout ce qui se déplace, ou peut-être déplacé.

Un objet occupe un endroit. Lorsqu'il se déplace, il libère l'endroit qu'il occupait, il occupe un nouvel endroit, il le libère, il en occupe un autre... pour un physicien, nous sommes, toi et moi, des objets.

Ceci est une définition *physique* de l'objet : pour un biologiste, un être vivant n'est pas un objet, alors que pour un mathématicien ensembliste, même les pensées, les rêves, les nombres ou les dates de naissance sont des objets (et les éléments d'ensembles, qui sont eux-mêmes des objets...)

Une façon efficace de te représenter un objet *physique* : imagine-lui une couleur - un radiateur rouge, un avion bleu, un bonhomme vert...

Deuxième escale : qu'est-ce qu'**un endroit ?**

Un emplacement, souvent repéré par un objet qui l'occupe, ou qui l'entoure, ou qui le montre : une main, un doigt, une flèche...

Tu ne peux ni saisir, ni déplacer un endroit. Tout juste le traverser, l'occuper ou le libérer, ou, naturellement, l'ignorer !

Toute notre géométrie étudie des endroits dont les positions ou les formes sont particulières : des points, des lignes, des surfaces, des « solides » (les points occupés par des objets ☺).

L'univers est un immense endroit : à chaque instant, la Terre - qui est un objet - occupe un endroit de cet univers.

Ta maison occupe un endroit sur cette Terre. Les murs, le plafond, le sol de ta chambre entourent un endroit déjà plus petit. Et toi-même, tu occupes un endroit, que tu libères lorsque tu te déplaces, pour en occuper un autre. Et tous ces endroits n'arrêtent pas de changer : la Terre tourne sur elle-même, tourne autour du Soleil, qui lui-même s'éloigne du centre de la Voie lactée, qui, pendant ce temps-là, s'éloigne des autres galaxies... et ta maison, accrochée à la Terre, change constamment d'endroit.

Seul, un endroit n'est pas visible. Il est là, c'est tout ! Tu n'y prêtes attention que s'il est occupé, traversé ou entouré par un objet qui t'intéresse... ou s'il s'agit d'une forme géométrique décrite dans un exercice que tu dois absolument rendre cet après-midi.

La notion d'endroit précède celle d'objet : tu peux imaginer un endroit vide, mais essaie d'imaginer un objet qui ne serait nulle part !

Troisième escale : qu'est-ce qu'**un objet ponctuel ?**

Un objet imaginaire, qui va t'aider à entrer dans le monde de la géométrie.

Excusez-moi…
Vous avez bien dit
« imaginaire » ?

Et ça peut m'aider, ça ???

Bien sûr, que ça peut t'aider !
« Faire de la géométrie », c'est plonger dans l'imaginaire. Jongler avec des endroits infiniment petits, ou infiniment minces, ou sans épaisseur... tous tes dessins, même s'ils te paraissent très précis, ne sont qu'une représentation extrêmement grossière, extrêmement imparfaite de points, de lignes... il ne sont là que pour t'aider à mieux les imaginer.

Je continue ?

Signe caractéristique : il est « plus petit que petit ». Mais qu'est-ce que ça veut dire ?

Choisis un objet, n'importe quel objet. Par exemple un Airbus modèle réduit, télécommandé.
Imagine (eh oui) que tu aies le pouvoir de le faire rétrécir 10 fois, cent fois, ..., un million de fois...

Avec un microscope suffisamment puissant, tu peux tout de même retrouver sa forme, voir ses ailes, ses réacteurs. Ce n'est pas un objet ponctuel. Imagine que tu continues à le faire rétrécir, encore... et encore. Jusqu'à ce que, malgré tes efforts, il ne puisse plus rétrécir davantage !

Avec un microscope vraiment très puissant, tu vas pouvoir, une dernière fois, retrouver sa forme, ses ailes... ce n'est toujours pas un objet ponctuel. Patience.

Mais tu t'entêtes, tu t'acharnes à le faire rétrécir une fois de plus, une fois de trop, et l'Airbus implose : il rentre en lui-même. Et là, il perd sa forme ! Aucun microscope, même surpuissant, ne te permettra plus jamais de voir que c'était un Airbus... c'est devenu un objet « plus petit que petit », un objet qui a dépassé les possibilités de réduction de notre univers réel.

Maintenant, tu as ton objet ponctuel ! Et tout ce que tu en vois, c'est un éclat de lumière (ses phares étaient allumés) : mais, avant d'imploser, ç'aurait aussi bien pu être un phare côtier, ou une lampe de poche... (Les physiciens, eux, parlent de « masse ponctuelle ». Rien ne t'empêche d'imaginer que l'Airbus a rétréci en conservant la même masse, en pesant toujours le même poids).

Escale-terminus **:** qu'est-ce qu'**un point ?**

Tu ne devines pas ? Un endroit « plus petit que petit ». Seul un objet ponctuel pourrait l'occuper sans en déborder… Mais ne va pas imaginer que tous les points doivent être occupés par des objets ponctuels !

En revanche, il serait raisonnable d'imaginer qu'un objet ponctuel occupe toujours un point. Raisonnable, sans plus : après tout, un objet ponctuel est imaginaire, alors pourquoi ne pas imaginer qu'il puisse se trouver « ailleurs » que dans un point…

« Ailleurs » **où** ?

Et là, ça devient vite trop compliqué ! D'où l'entrée en scène de M_{phy}-0, le métaxiome physique que je t'avais annoncé (la première règle de notre jeu de construction), qui va nous permettre de respirer :

M_{phy}-0 Un objet ponctuel qui se déplace occupe constamment un point.

Ça n'a peut-être l'air de rien, comme ça. Mais tous les raisonnements géométriques s'appuient sur cette propriété de l'objet ponctuel et du point. Et je m'en servirai, bien sûr, pour te prouver que les segments [AB] et [CD] ont réellement autant de points… Dès que j'aurai défini « autant » ☺.

Pour commencer notre géométrie, je devais inventer ou l'objet ponctuel, ou le point... l'autre suit assez simplement. J'ai choisi d'inventer l'objet ponctuel, parce qu'il me semble plus facile d'imaginer la réduction d'un objet que celle d'un endroit. Mais tu as le droit de ne pas être d'accord !

<u>Deuxième croisière</u> : « autant ».

<u>Première escale</u> : qu'est-ce qu'**un ensemble ?**

Suppose que tu penses à la fois à cette page que tu lis, à ta dernière note en maths, et à ton pire ennemi. Tu penses à trois objets - au sens mathématique du mot « objet », et ta pensée est peut-être le seul lien entre eux. Cette pensée est une bonne représentation d'un ensemble. Ce n'est qu'une image, mais elle n'est pas mauvaise : un ensemble est comme une pensée à propos d'objets. Tu peux t'intéresser à des ensembles farfelus, en y rassemblant, comme je l'ai fait, des objets qui n'ont pas grand-chose de commun... ou tu peux observer des ensembles dont les objets sont tous du même type : par exemple, des ensembles de points, comme les segments de droite (tu vois, on y arrive ☺). Si A et B sont 2 points, ce que tu appelles « segment A-B » (et que tu écris [AB]) est un ensemble, dont les objets sont A, B et les points de (AB) situés entre A et B … S'il y en a, c'est-à-dire lorsque $A \neq B$!

(Mais... euh... ça veut dire quoi, « entre » ?
Patience, patience ☺)

<u>Deuxième escale</u> : qu'est-ce qu'**un élément ?**

« Élément », en fait, est une abréviation de « élément d'un ensemble ». Et les éléments d'un ensemble sont... les objets qui y sont rassemblés. Tout simplement ! Par exemple, A est un élément de [AB]. B aussi, bien sûr. Comme n'importe quel autre point du segment. Pourquoi avoir inventé ce nouveau mot, alors que le mot « objet » existe déjà ? Pour permettre de séparer tous les objets de l'univers en deux catégories : ceux qui « appartiennent » à l'ensemble qui t'intéresse, les « éléments » de cet ensemble... et les autres !

<u>Mini-escale</u> : qu'est-ce qu'**une paire ?**

Un ensemble qui a exactement deux éléments.

Oh...
Ça alors,
je suis surprise !

C'est ça, moque-toi !
Je n'y peux rien, moi.

<u>Escale-terminus</u> : que signifie « **autant** » **?**

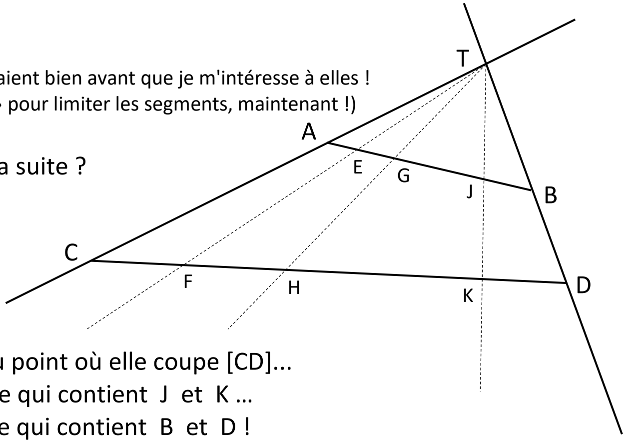
En maths, ce mot n'a de sens qu'entre deux ensembles.

« Deux ensembles ont autant d'éléments » veut dire qu'il est possible de composer des paires avec **TOUS** les éléments des deux ensembles - en associant à chaque fois un élément du premier ensemble et un élément du deuxième ensemble, sans jamais prendre deux fois le même !
Imagine un ensemble de personnes et un ensemble de chaises : il y a autant de personnes que de chaises si tu peux composer des paires « personne et chaise » - par exemple en asseyant chaque personne sur une chaise ☺ - avec toutes les personnes et avec toutes les chaises, sans tricher (pas de personnes en trop, pas de chaises en trop, pas plusieurs personnes sur la même chaise, pas plusieurs chaises sous la même personne) !

Après ces deux croisières, je peux presque te prouver que [AB] et [CD] ont autant de points. Pourquoi « presque » ? Parce que cette preuve repose sur la notion de droite, sur les propriétés des droites... et ça, nous ne les verrons que plus tard. Mais comme je sens que tu craques, je vais faire comme si tu savais déjà tout sur les droites. Seulement, tu n'y couperas pas : cela n'aura vraiment de sens pour toi que si tu lis les pages suivantes !

Regarde : je « trace deux droites », (CA) et (DB).

(ça veut dire que je les mets en évidence. Mais elles existaient bien avant que je m'intéresse à elles ! Et tu as remarqué : je n'ai plus besoin des « petits traits » pour limiter les segments, maintenant !)



J'appelle T le point commun à ces deux droites. Tu devines la suite ?

Imagine toutes les demi-droites qui « partent » de T et qui traversent [AB]... ou [CD], ce sont les mêmes !

Pour chacune de ces demi-droites,
imagine la paire composée du point où elle coupe [AB] et du point où elle coupe [CD]...
La paire qui contient E et F, celle qui contient G et H, celle qui contient J et K ...
Et bien sûr, n'oublie pas la paire qui contient A et C, ni celle qui contient B et D !

Avec ce système, tu associes bien chaque point du premier segment à chaque point du deuxième. Sans en laisser aucun de côté, sans prendre deux fois le même.

Donc (roulements de tambour)... [AB] et [CD] ont autant de points.

En fait,
ça marche parce que
les points de [CD]
sont plus gros
que ceux de [AB],
c'est ça ?

si [CD] est
2 fois plus long
que [AB],
ses points
sont 2 fois plus gros ?

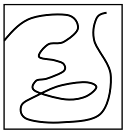
PAS DU TOUT !
Désolé, mais tu as tout faux.

Ce qui rend les points extraordinaires,
c'est justement qu'il n'existe PAS de gros points !!!
Personne ne peut faire grossir un point.
Même avec un super-méga-hyper microscope !
Exactement comme aucun télescope optique
n'est capable de faire grossir une étoile lointaine
(les étoiles ne sont pas « plus petites que petites », bien sûr. Elles sont « plus loin que loin » ☺)

Je crois que je dois VRAIMENT te parler de la différence entre ligne et trait !
Allez, on y va !

<u>Croisière bonus</u> : du point à la ligne, de la ligne au trait.

<u>Première escale</u> : qu'est-ce qu'**une ligne ?**



Tu te rappelles l'Airbus modèle réduit qui a implosé, qui est devenu un objet ponctuel ?
Imagine (encore !) que cet « avion-ponctuel » fait des acrobaties dans le ciel. Imagine que, dans chaque point qu'il traverse, il laisse une trace de fumée blanche - une trace pas plus grosse qu'un point !

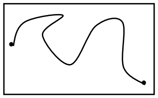
Alors tu verras un fil de fumée, un fil qu'aucun microscope ne pourrait épaissir, un fil "plus fin que fin".
Ce fil occupe une ligne.

Une ligne est un ensemble de points, donc un endroit : tu ne peux ni la saisir, ni la déplacer. Juste l'occuper ou la traverser.

La famille des lignes est une des grandes familles de classification des figures géométriques :
les 3 autres grandes familles sont celles des points, des surfaces et des solides (qui ne sont pas des objets !)

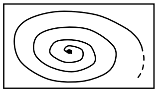
…Tout comme en zoologie tu connais certainement la classe des oiseaux, celle des reptiles, celle des mammifères…

Lignes limitées, lignes illimitées ?



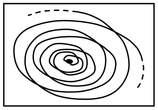
Tu peux facilement concevoir **une ligne limitée**.
C'est un trajet (mais pas nécessairement en ligne droite !) d'un objet ponctuel entre 2 points - ou d'un objet ponctuel qui revient à son point de départ (la ligne est alors « fermée »).

Un segment de droite, un arc de cercle, un polygone, un cercle,
ou encore un trajet formé de 3 segments suivis de 2 arcs de cercles…



Une ligne illimitée est plus difficile à concevoir :
il te faut imaginer un objet ponctuel qui part pour ne plus jamais s'arrêter. Pas même dans 5 milliards d'années, lorsque notre soleil aura cessé de briller !

Une demi-droite ou une spirale simple sont des lignes illimitées.



Si tu peux imaginer 2 objets ponctuels qui partent successivement du même point, mais dans 2 sens différents, et qui ne s'arrêteront jamais, tu peux concevoir une ligne illimitée dans les 2 sens.

Par exemple une droite, bien sûr, mais aussi une spirale double, et beaucoup d'autres lignes.

Reconnais que ça demande un effort !

Une ligne n'est jamais finie !

Ne confonds pas limitée et finie :

limitée veut dire que la ligne a deux limites (deux points qui l'arrêtent)… Ou qu'elle est fermée !

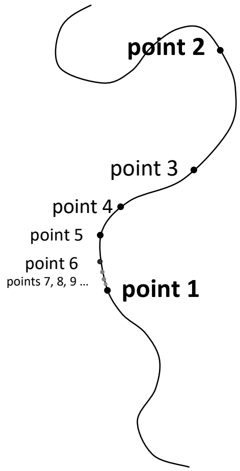
finie signifierait que tu peux en compter les éléments (c'est-à-dire les points qui la composent) …
Et ça, ce n'est pas possible : même une ligne limitée est composée d'une infinité de points !

Même une toute petite ligne ? Toute toute petite ?

Même une toute toute toute petite !
Regarde :

Choisis 2 points d'une ligne. 2 points différents… Donc 2 points séparés.

(S'ils n'étaient pas séparés, cela voudrait dire qu'aucun microscope, même hyper-puissant, ne permettrait de les distinguer : tu aurais simplement choisi 2 fois le même point.)



Existe-t-il au moins un autre point de cette ligne,
entre les 2 points que tu as choisis ?

Oui, sinon, comment un objet ponctuel passerait-il du 1er point au 2ème ?

Bon. Tu avais choisi "point 1" et "point 2",
et te voici maintenant avec "point 3",entre "point 1" et "point 2"…

Et maintenant :

Existe-t-il au moins un autre point de la ligne,
entre "point 1" et "point 3" ?

Je suppose que tu devines la suite?
Tu vas te retrouver avec "point 4", "point 5", "point 6"…

… Et ça ne s'arrêtera jamais ! Mais NON, tu ne retomberas jamais sur "point 1" :
tu peux le vérifier en utilisant des microscopes de plus en plus puissants…

Et si tu as déjà utilisé le plus puissant des microscopes?
Cela ne prouve que les limites de notre technologie :
imagine un microscope parfait !!!

Peux-tu tracer une ligne ?

"Tracer une ligne" est un abus de langage.
En réalité, tu traces un trait, et pour ça, rendez-vous à l'escale suivante !

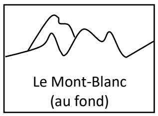
Tous les dessins de ces pages ne sont donc que des traits, qui t'aident à imaginer des lignes. Tu y avais pensé ?

Deuxième escale : qu'est-ce qu'**un trait ?**

Râpe une mine de crayon sur une feuille de papier.
Tu as tracé un trait, en déposant de la poussière de crayon entre les fibres du papier.

Tu pourrais également : imbiber la feuille d'encre (stylo : teinture des fibres),
y incruster des particules d'encre solide (imprimantes à aiguilles…),
y faire fondre de la poussière d'encre, puis la sécher - une sorte de caramélisation !
(photocopieuses, imprimantes laser…),
y projeter de l'encre liquide (imprimantes à jets d'encre)…

… Ou faire apparaître un trait sur toutes sortes de supports(*), par toutes sortes de procédés :
chimiques (photos), optiques (cinéma, laser), électroniques (télévision, moniteurs)…



(*) Sans même parler du bon vieux tableau noir sur lequel tu râpes une craie, dont la poussière se dépose - en partie ! - dans les creux du tableau !

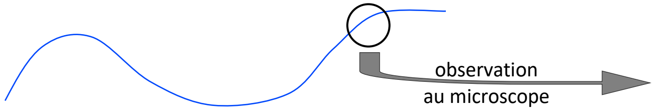
Un trait n'est PAS une ligne, pas plus qu'une photo du Mont-Blanc n'est le Mont-Blanc !
Les traits et les photos sont 2 inventions humaines.

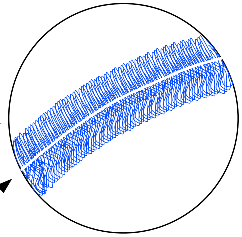
Escale-terminus : différence entre **ligne** et **trait**

Lorsque tu traces un trait, c'est comme si tu passais une couche de peinture sur une ligne, avec un pinceau infiniment trop large :

tu occupes la ligne, évidemment, mais tu la débordes, tu barbouilles tout autour.
Même avec un un crayon qui **te paraît** très fin.

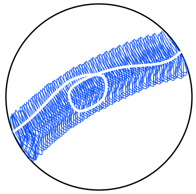
Un trait est un **objet :** de la poussière de crayon…



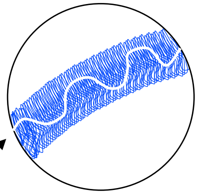


… Une ligne est un **endroit**, quelque part dans le trait.

Au microscope, **le trait devient épais, la ligne n'épaissit pas !**



Bien sûr, la ligne à laquelle je pensais en traçant ce trait pourrait tout-à-fait ressembler à ceci…



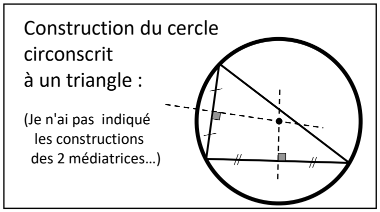
… Ou peut-être à cela ?

Mais les mathématiciens ont décidé que les traits qu'ils traçaient devaient donner une idée aussi claire que possible des lignes qu'ils représentaient. Alors reste simple !!!

Quel trait veux-tu tracer ?

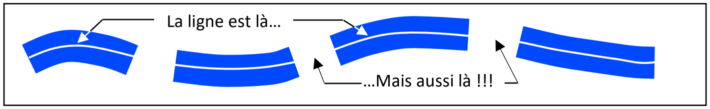
Les lignes que tu veux mettre en évidence n'ont pas toutes la même importance :
certaines sont les éléments de départ d'un exercice,
d'autres ne sont que des aides à la construction,
d'autres sont tes réponses aux questions posées.

Alors, varie les traits - traits pleins, pointillés, tiretés, mixtes, traits fins ou traits épais,
et utilise - raisonnablement- couleurs et surligneurs.



Mais tous ces mots n'ont peut-être pas beaucoup de sens ? Patience ☺

Et une dernière précision :
un trait tireté ne représente PAS une ligne tiretée. Ou alors, tu dois le préciser !



Allez, on rentre au port. Tu as déjà eu une croisière bonus, le pilote est fatigué ! On se reverra ?

Oh là là ma tête !

Mais je crois que j'ai tout compris… Sauf le truc de retirer le point A à [AB] et on n'a plus autant de points que dans [CD] !

Ça, vous l'avez toujours pas expliqué !

Parce que si les segments ont tous autant de points, il suffit de prendre le point de [AB] qui était juste à côté de A, mettons que je l'appelle P… et [PB], c'est bien un segment, non ?

Eh oui, il suffit de …

SAUF QUE, pas de chance,
il n'existe pas de point « juste à côté de A »

Imagine un objet ponctuel qui part de B et qui avance vers A, en ligne droite. Il atteint P. Mais il n'est pas encore à A. Donc il va traverser d'autres points pour atteindre A !

Tout est là :

Il n'existe pas de dernier point avant A ☺☺☺

Deuxième voyage

en 1 croisière, 2 escales et 1 excursion

Droite ***Objet linéaire*** ***Entre***

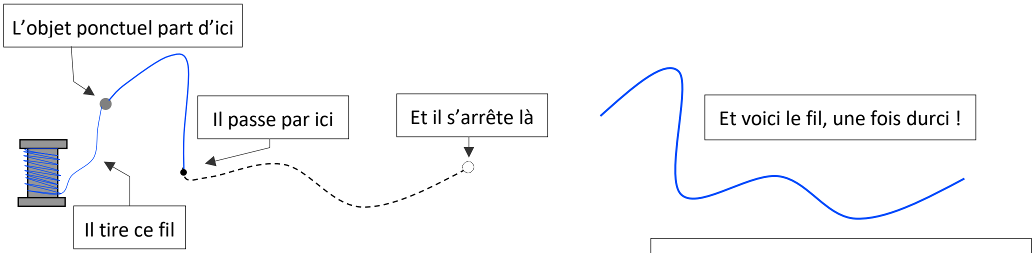
Croisière unique : la droite.

Première escale : qu'est-ce qu'**un objet linéaire ?**

Tu te rappelles qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ?

Imagine maintenant que l'objet ponctuel, en se déplaçant, entraîne derrière lui un fil très fin… Vraiment très très fin ! Encore plus fin que ça ! Un fil pas plus épais qu'un point. Un **fil imaginaire**, bien sûr.
Ce fil matérialise le trajet de l'objet ponctuel : il occupe l'ensemble des points traversés par cet objet.

Et si ce fil, au bout de quelques secondes, durcissait et devenait rigide ?
Tu aurais un objet en forme de ligne - et pas plus gros qu'une ligne ! Un objet que tu pourrais, à son tour, déplacer :



C'est un objet **linéaire**

(ça vient du latin *linea* - ligne -
et ça rappelle qu'il occupe une ligne)

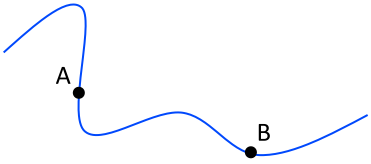
Tu avais déjà un objet ponctuel, te voilà maintenant avec un objet linéaire.

Que vas-tu en faire ? Le déplacer, évidemment !!!

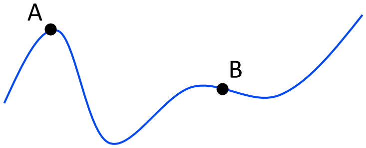
Escale-terminus : qu'est-ce qu'**une droite ?**

Tu as marqué deux points, A et B, sur une feuille. Tu veux déplacer l'objet linéaire que tu viens de créer, pour qu'il passe par ces deux points. Tu peux y arriver de plein de façons différentes :

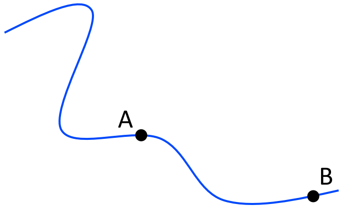
comme ça... :



... comme ça... :

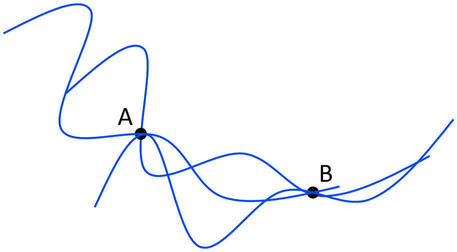


... comme ça... :



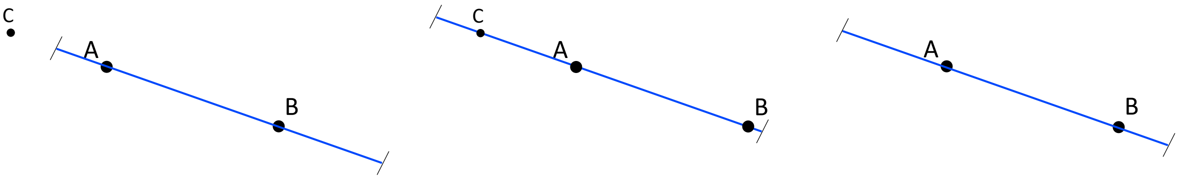
... et encore de bien d'autres façons !

(Si je regroupe les trois premières façons sur un même dessin, j'obtiens un joli dessin, qui correspond à 3 trajets différents :



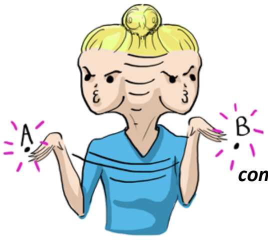
)

Si tu crées un objet linéaire au hasard, tu lui trouveras également de nombreuses façons différentes de passer par A et B...
Même si par hasard tu penses à un objet linéaire en forme de « segment de droite »
(mais là, j'anticipe, tu ne sais toujours pas ce qu'est un segment ☺) :



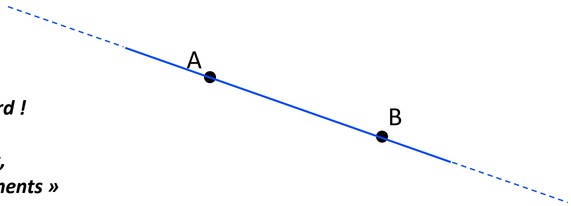
Ces 3 positions correspondent bien à 3 trajets différents d'un objet ponctuel :
dans le deuxième cas, par exemple, il traverse C, alors que dans le premier cas, il ne le traverse pas !

Mais je <u>décide</u> que je peux imaginer un objet linéaire particulier - dont la forme est unique ! - qui, quelle que soit la façon dont il passe par A et B, occupera constamment le même endroit. Exactement le même endroit. L'objet, j'ai choisi de l'appeler un « *OLDI* », pour « ***O***bjet ***L***inéaire ***D***roit ***I***llimité » (ce n'est pas du tout un nom officiel)... Et l'endroit, tu l'appelles **droite**, et tu l'écris (AB).



Mais non, je ne suis pas d'accord !

Je peux faire glisser cet objet,
comme pour les trois « objets-segments »
juste au-dessus...
Et alors, il passera par A et B
de plusieurs façons !



Oui... mais comme cet objet, je l'imagine illimité, il continuera à occuper les mêmes points ! En glissant, il ne fait que se déplacer dans l'endroit illimité qu'il occupe.
Cet endroit que tu appelles « droite » ☺.

Pour te parler de la droite, je me suis servi - sans te le dire - de plusieurs de ces « axiomes » dont je t'ai parlé. Juste pour ta culture générale, je me suis principalement appuyé sur ceux-ci - mais pas uniquement :

Soient deux points, il existe une droite passant par ces deux points.

Soient deux points, il n'existe qu'une droite passant par ces deux points.

<u>Bon, encore une petite excursion avant de quitter la croisière</u> :

discrètement caché derrière la droite, un mot qui vaut le détour : le mot « entre » !

<u>Une précision</u> : *Parce que je suis un peu paresseux, j'appellerai en général A, B, C, D, E … les points que j'observe (les lettres majuscules isolées représentent habituellement des points), mais rien ne t'empêche de les appeler K, W, Z …*

<u>Une 2ème précision</u> : *les points que j'appelle A, B, C … Ne sont pas les mêmes d'un exemple à l'autre :*
en géométrie, les noms « meurent » en même temps que les objets qu'ils désignent, et renaissent plus tard pour de nouveaux objets.
(Un objet « meurt » lorsqu'on ne s'intéresse plus à lui... c'est bien connu !)

<u>Une dernière précision</u> : *dans mes dessins, je représente les lignes par des traits plus ou moins épais, et les points par des taches plus ou moins grosses - suivant l'importance qu'ils me semblent avoir.*
*Mais tu te rappelles qu'une ligne - **une vraie ligne**, et un point - **un vrai point**, **n'ont pas d'épaisseur** ! Je ne suis qu'un être humain, je ne peux pas faire mieux. À toi de faire fonctionner ton imagination, de « voir » une ligne au cœur de chaque trait, un point au cœur de chaque tache.*

<u>Entre</u> **:** B *est entre* A *et* C.

« Entre » est un de ces mots qui paraissent tout simples... tant qu'on ne creuse pas !

Je ne peux pas plus te le définir que je n'ai pu te définir le point, la ligne où la surface. Mais, là encore, je peux t'en préciser l'idée en m'appuyant sur la notion d'objet ponctuel - qui n'est pas, à proprement parler, un objet mathématique et ne peut donc pas être utilisé pour une définition.

Sans précision supplémentaire, « entre » n'a de sens qu'à propos de points d'une même droite, et dans ce cas, « B *est entre* A *et* C » signifie :

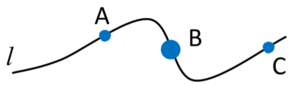
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C,
<u>sans quitter la droite (AC)</u>,
traverse B.

(Oui, bien sûr, il peut aussi se déplacer en allant de C à A... et ça t'amuse ?)

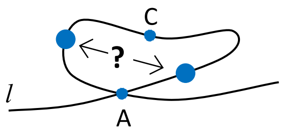
Mais tu peux également utiliser « entre » à propos de points d'une ligne quelconque, en le précisant. Et là, ça se complique un peu :

si A, B et C sont trois points d'une ligne *l*, et si cette ligne *l* ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B *est un point de la ligne l, entre* A *et* C » signifie encore :

un objet ponctuel
qui se déplace en allant de A à C,
<u>sans quitter la ligne *l*</u>,
traverse B.



Mais si la ligne *l* passe plusieurs fois par A et C,
« *entre* A *et* C » n'a plus de sens précis.



Troisième voyage

en 2 croisières, 4 escales et 1 excursion

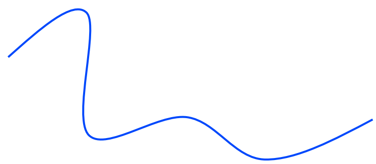
Surface ***Plan*** ***définitions physiques*** ***Espace*** ***Solide***

Première croisière : le plan.

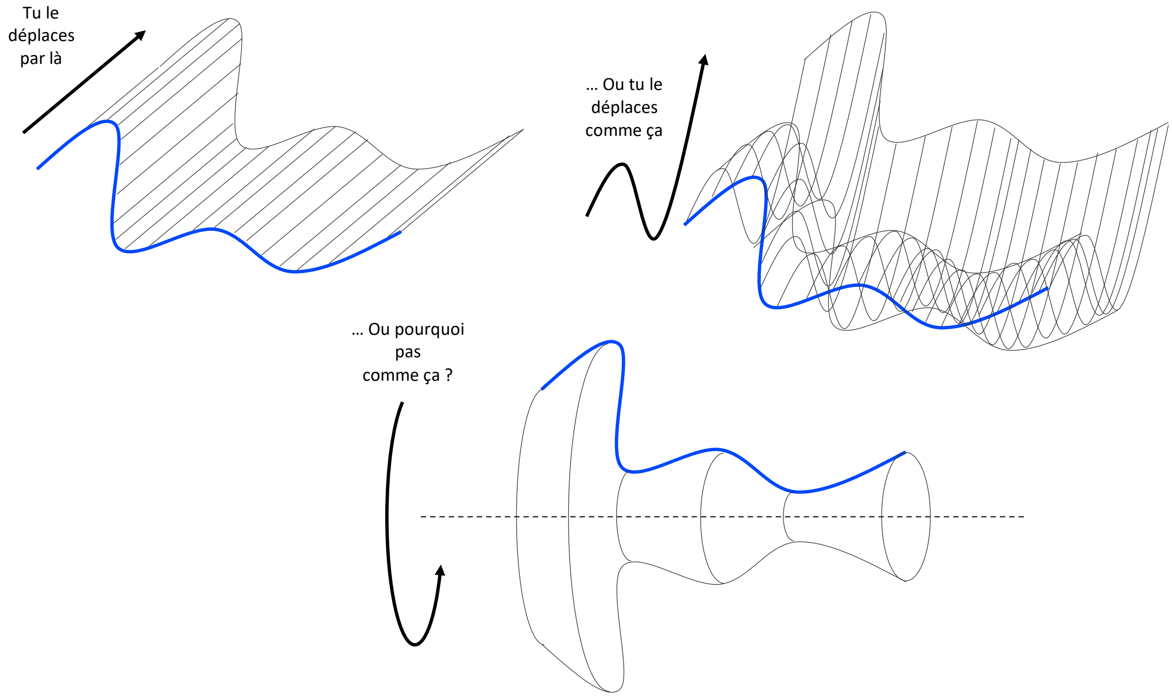
Première escale : qu'est-ce qu'**une surface ?**

Tu te rappelles qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ? … Pardon, je radote. Mais aussi, l'histoire se répète tellement : une surface, elle, est le trajet d'un objet *linéaire* !
(Comme les lignes, les surfaces sont des ensembles de points, donc des endroits.)

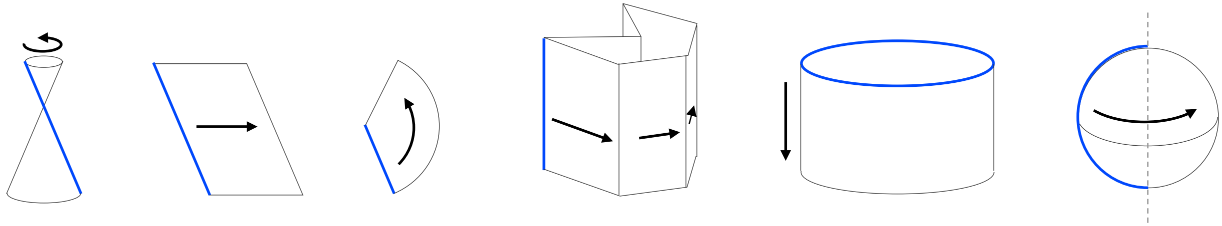
Reprends l'objet linéaire que nous avons créé dans la croisière précédente :



Déplace-le, et observe l'ensemble des points qu'il traverse :



Juste pour le plaisir, voici quelques autres surfaces, créées (en maths, on dit plutôt « engendrées ») à partir d'objets linéaires simples :

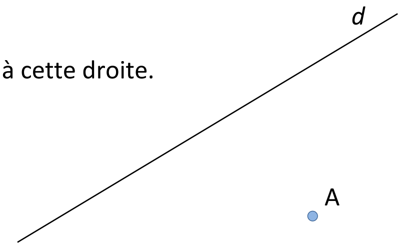


Je ne cherche pas ici à définir rigoureusement la notion de surface (certaines surfaces, vraiment très énervantes, ne peuvent pas être engendrées par le déplacement d'un objet linéaire)… Juste à te donner une idée (superficielle ☺) de ce que c'est !

Escale-terminus **:** qu'est-ce qu'**un plan** ?

Imagine une droite et un point qui n'appartient pas à cette droite.

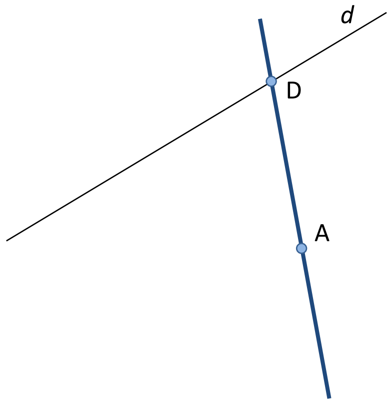
Allez, j'appelle A ce point,
et *d* la droite !



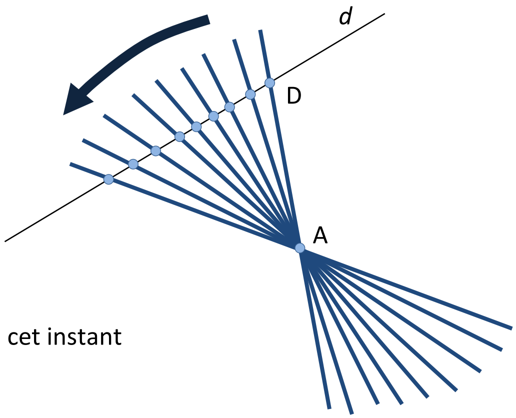
Imagine maintenant un « *OLDI* ».
(un « *O*bjet *L*inéaire *D*roit *I*llimité ». Tu te rappelles ce que c'est :
un objet linéaire qui occupe une droite ? Toute une droite !)
Évidemment, je ne peux te dessiner
qu'une toute petite partie de l'*OLDI*,
Tout comme je n'ai pu te dessiner qu'une toute petite partie de *d* !

Lui →

Imagine maintenant que je place cet *OLDI*
de façon à ce qu'il passe par A
et par un point de *d*, que j'appelle D :



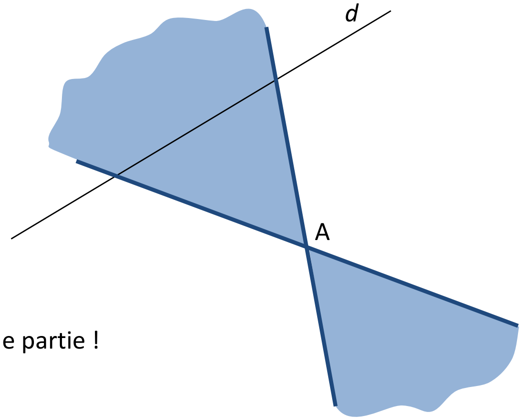
Imagine ensuite que je déplace l'*OLDI* :
il continue à passer par A,
et à traverser différents points de *d*
(Imagine qu'il glisse le long de *d*).
Comme ça :



Et moi, je vais continuer à appeler D les points de *d*
que l'*OLDI* traverse lorsqu'il se déplace...
Bien qu'en réalité, il change constamment de point.
D signifiera donc : le point de *d* que l'*OLDI* traverse à cet instant
(« on » l'appelle souvent un « point courant » de *d*).

En se déplaçant,
même sur un segment de *d*,
l'*OLDI* engendre une surface immense…
Et même illimitée - parce qu'il est illimité.

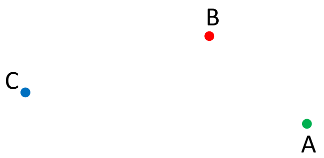
Elle ressemble à ça :



Cette surface est une partie d'un plan. Mais juste une partie !

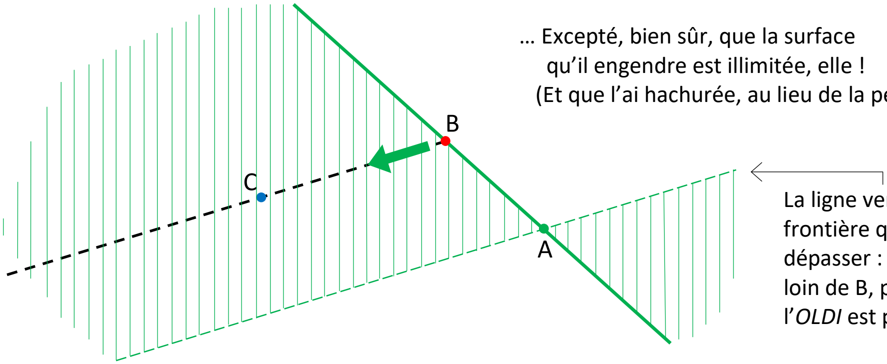
Tu veux engendrer tout un plan ?
Il va te falloir trois points... et trois *OLDI*s !

Commence par choisir trois points, mais PAS trois points de la même droite.
Je les appelle A, B et C.



Place le 1er *OLDI* de façon à ce qu'il passe par A et B. Puis, sans qu'il quitte A, déplace-le le long de la droite (BC), en direction de C : à chaque instant, il traverse un « point courant D » de (BC)… Mais cette fois-ci, ne te limite pas à un segment : laisse D dépasser C, puis s'enfuir loin de B (l'ensemble de ces « points courants D » s'appelle la « demi-droite d'origine B, passant par C », et se note [BC) … J'y reviendrai bientôt ☺) !

Pour mieux visualiser la surface que l'*OLDI* engendre, imagine qu'il est vert, et qu'il « peint en vert » les points qu'il traverse. Tu vas obtenir quelque chose comme ça :



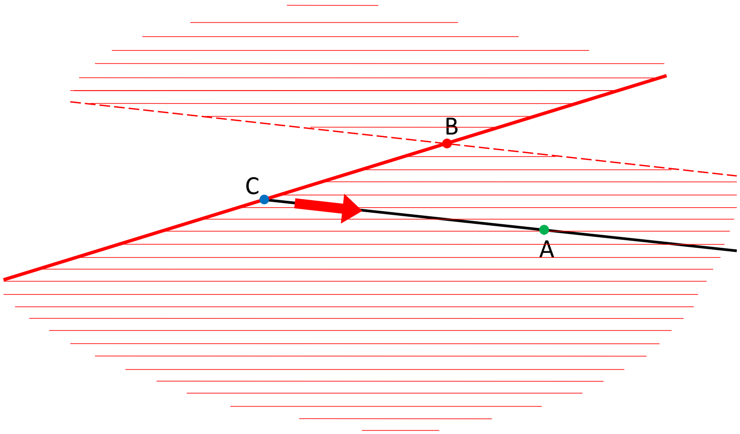
… Excepté, bien sûr, que la surface qu'il engendre est illimitée, elle ! (Et que l'ai hachurée, au lieu de la peindre)

La ligne verte, en pointillés, est une frontière que l'*OLDI* ne peut pas dépasser : plus le point courant D est loin de B, plus la droite occupée par l'*OLDI* est proche de cette frontière…

Attendez, Monsieur ! Laissez-moi deviner… Votre OLDI, il atteindra jamais la frontière, c'est ça ? Parce qu'il y a toujours d'autres points « D », encore plus loin !
C'est ça ? J'ai raison ?

☺ Oui, tu as raison.
Et … Bravo ! Mais c'est une autre histoire. Elle n'est pas trop utile aujourd'hui.

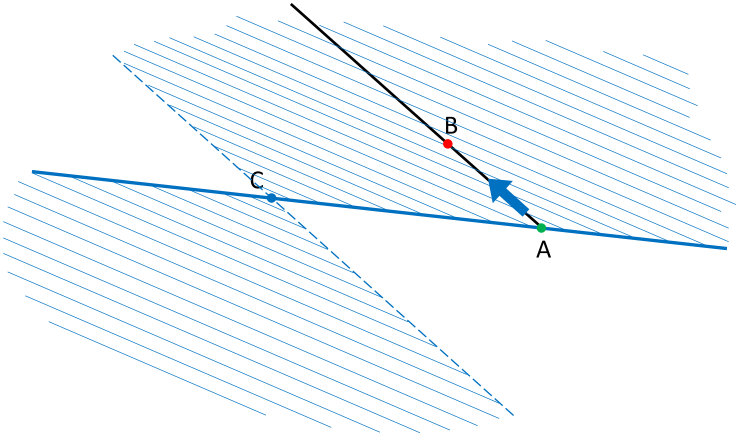
Maintenant, laisse l'*OLDI* vert poursuivre son chemin (tu l'as perdu, il ne reviendra jamais), et recommence avec un *OLDI* rouge qui passe toujours par B et qui glisse le long de [CA]. Tu obtiens une nouvelle surface - dont une partie avait d'ailleurs déjà été engendrée par le 1er *OLDI* ☺



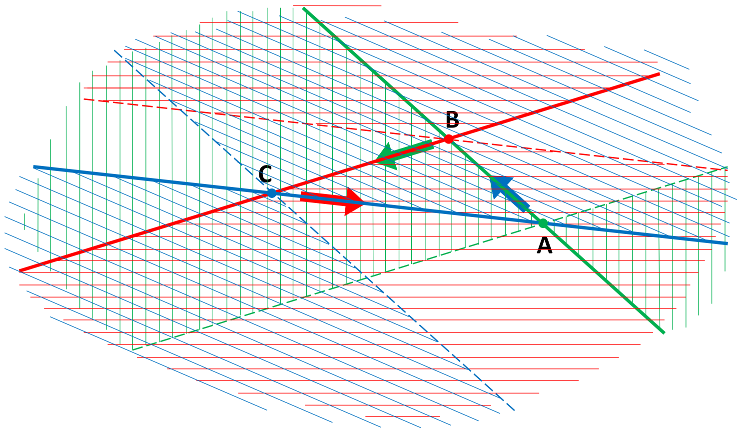
Une nouvelle surface
ET
une nouvelle frontière,
Monsieur !

ET une nouvelle frontière, oui !
Tu y tiens, à ta frontière ☺ !

Et recommence une dernière fois avec un *OLDI* bleu (eh oui, tu as aussi perdu le rouge !) qui passe toujours par C et qui glisse le long de [AB]. Nouvelle surface (et nouvelle frontière, je sais !) :



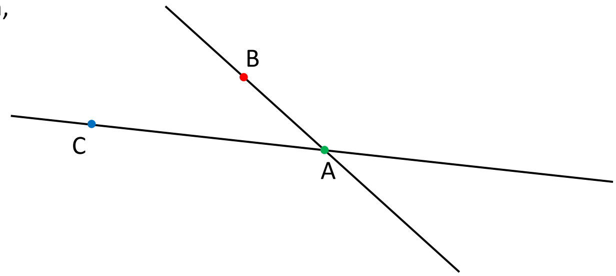
Et finalement, si tu veux avoir une idée de la surface engendrée par les 3 *OLDI*s :



C'est cette surface
- une surface illimitée, bien sûr -
que les mathématiciens appellent
un plan !

Ca te paraît compliqué ?
Bon, voici une autre façon de visualiser ce plan,
toujours à partir des 3 points A, B et C :

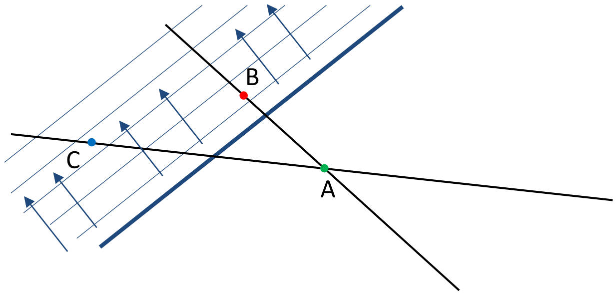
Imagine les droites (AB) et (AC)



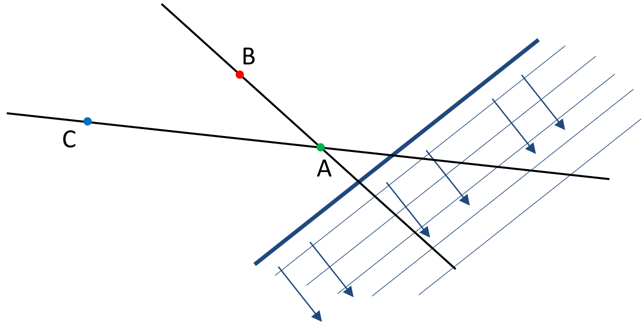
Puis déplace un *OLDI* de façon à ce qu'il reste en contact avec 2 des 4 demi-droites d'origine A

comme ça :

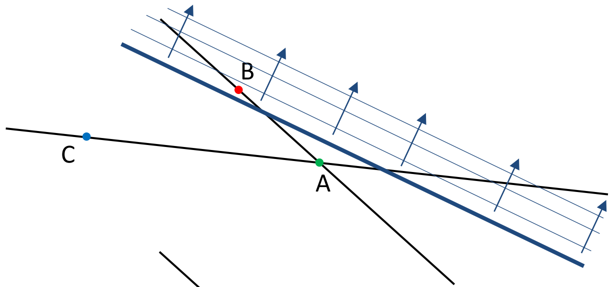
(imagine qu'il glisse comme sur 2 rails)



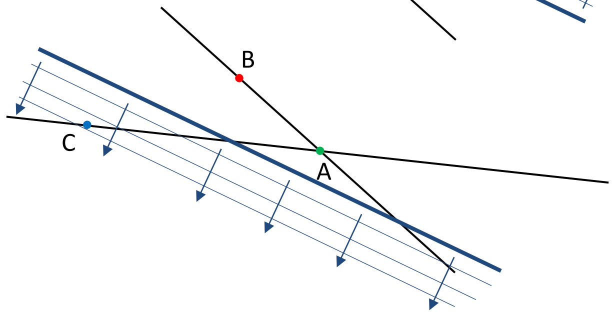
Puis un 2ème *OLDI*, comme ça :



… Un 3ème, comme ça :

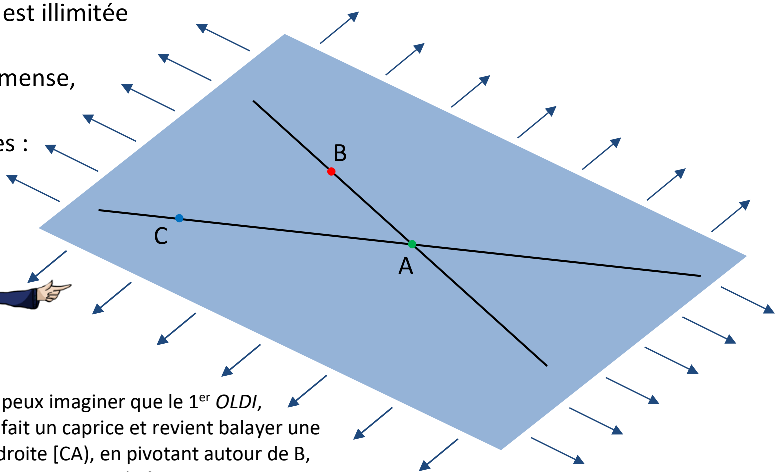


… Et enfin un 4ème, comme ça :

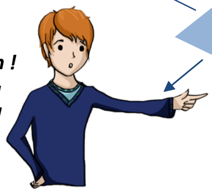


Si tu te rappelles qu'une droite est illimitée
(et tes *OLDI*s également),
tu obtiens la même surface, immense,
que tout à l'heure.
Une surface sans creux ni bosses :

un plan !



Oui… Mais non ! Il reste un trou autour de A !!!



C'est vrai. Mais tu peux imaginer que le 1er *OLDI*, lorsqu'il atteint B, fait un caprice et revient balayer une partie de la demi-droite [CA), en pivotant autour de B, comme l'*OLDI* rouge. Juste ce qu'il faut pour combler le trou… Ensuite, il reprend sa position initiale et son chemin.

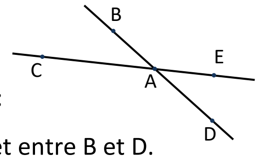
cord, M'sieur, d'accord.
;, euh, y a pas moyen de… D'engendrer un plan d'un seul coup, je veux dire…
: un seul OLDI ? Sans le perdre ? … Finalement, j'y tiens, moi, à vos OLDIs !

D'un seul coup, c'est-à-dire d'un seul mouvement, non… Mais avec un seul *OLDI*, oui. Et sans le perdre ☺ !
Comme ta question me touche, je vais te le montrer… Mais comme je suis un peu fatigué, je vais te laisser « peindre » les surfaces. Je vais juste t'indiquer les mouvements, d'accord ?

D'accord, M'sieur !

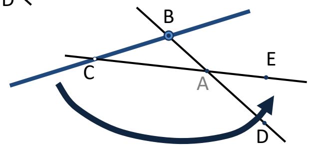
C'est parti ! Un plan, 3ème version :

Pars des 3 points A, B et C que tu connais.

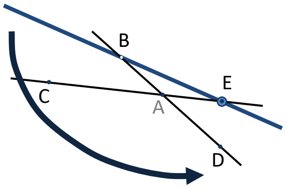


Imagine les droites (AB) et (AC) et 2 nouveaux points :

D sur (AB) et E sur (AC), tels que A soit entre C et E, et entre B et D.

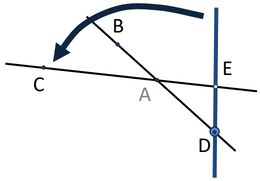


Place ton *OLDI* de façon à ce qu'il passe par B et C,
Puis, sans quitter B, fais-le glisser de C à E tout le long du segment [CE]
- un peu comme l'*OLDI* rouge, mais en l'arrêtant en E !



Ensuite, sans quitter E, fais-le glisser de B à D, tout le long du segment [BD]

… Et enfin, sans quitter D, fais-le glisser de E à C tout le long du segment [EC]



Et voilà. Maintenant, tu peux ranger ton *OLDI*, tu ne l'as pas perdu…
Et il a bien engendré le même plan que les *OLDI*s précédents.

3 points, lorsqu'ils n'appartiennent pas à la même droite, suffisent à déterminer un plan :

dans la 1ère version, tu fais glisser des OLDIs sur 3 ½ droites définies par ces 3 points,
dans la 2ème version, sur 2 droites définies par ces 3 points,
et dans la dernière version, sur 2 segments (sécants) de 2 droites définies par ces 3 points.

Un plan sépare l'univers entier en 3 parties :

l'ensemble des points d'un côté du plan, le plan, l'ensemble des points de l'autre côté du plan…

Et un plan est tellement immense que tu ne peux pas le contourner : si tu veux passer d'un côté à l'autre, tu dois le traverser ! Impressionnant, non ?

(Si ton prof. te parle du « plan du tableau », il veut dire : le plan dont le tableau - imagine qu'il contient ABC - occupe une minuscule partie. Ce plan continue à gauche, à droite, au-dessus et en-dessous du tableau, sans limites. Il traverse la Terre, le système solaire, notre galaxie… Tout l'univers)

<u>Excursion</u> : Neuf « dé-phy » fondamentales.

J'avais commencé par écrire
« neuf défis fondamentaux »
mais je me suis dit que si je commençais
à faire des jeux de mots dans les titres,
tu n'allais vraiment pas prendre ce livre au sérieux !

Euh…Qui vous a dit que je le prenais au sérieux ?

Ce n'est qu'une toute petite excursion de fin de croisière, une petite pause, pour préparer les croisières et les voyages suivants… Tu l'as bien méritée. Savoure-la !

<u>Les « dé-phy », ce sont les « défi</u>nitions <u>phy</u>siques <u>» qui sous-tendent notre géométrie</u>.

Ce ne sont pas de « vraies » définitions, au sens des mathématiques, parce qu'elles utilisent des éléments non mathématiques : des objets, mobiles. Le fait que ces éléments soient imaginaires les rend un peu plus fréquentables, mais pas au point de les introduire dans une définition géométrique. Ils sont toutefois précieux car ils permettent d'éclairer notre vision de la géométrie et d'éviter ainsi de nombreuses erreurs.
Et surtout, ils sont à l'origine implicite de cette géométrie.

Comme je l'ai fait pour les définitions logiques et pour M_{phy}-0, comme je le ferai bientôt pour les « vraies » définitions, les théorèmes et les « métaxiomes », je vais donner un numéro à chacune de ces « dé-phy », et ces numéros - précédés des lettres «$\mathbf{D_{phy}}$» te permettront de les identifier, si nécessaire, tout au long de ce livre. Ce seront leurs noms.

Dphy**-0** ***Objet ponctuel*** : objet imaginaire, « plus petit que petit » : un objet qui, à force d'être réduit, aurait implosé, serait rentré en lui-même. Aucun microscope ne peut l'agrandir.

Je l'imagine souvent lumineux : une sorte d'étoile très proche, que je peux diriger. (Aucun télescope ne peut non plus agrandir une étoile - à part notre Soleil : c'est parce que les étoiles, elles, sont « plus loin que loin »)

Dphy**-1** ***Point*** : endroit que seul un objet ponctuel peut occuper exactement (sans en déborder).

Dphy**-2** ***Ligne*** : trajet d'un objet ponctuel (l'ensemble des points qu'il traverse en se déplaçant).

Dphy**-3** ***Objet linéaire*** : objet (imaginaire) qui occupe exactement une ligne. Aucun microscope ne peut l'épaissir.

Dphy**-4** ***« OLDI »*** (***Objet Linéaire Droit Illimité***) : 2 points étant choisis, objet linéaire qui, quelle que soit sa façon de passer par ces 2 points, occupe toujours exactement le même endroit.

Dphy**-5** ***Droite*** : un endroit que seul un *OLDI* peut occuper exactement.

Dphy**-6** ***Surface*** : trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet n'est pas une ligne.

Surface dégénérée **:** le trajet d'un objet linéaire, lorsque ce trajet est une ligne (par exemple un objet-segment qui glisse le long de sa droite-support)

ou **:** le « trajet » d'un objet linéaire immobile ☺

Dphy**-7** ***Plan*** : 2 droites sécantes étant choisies, surface maximale engendrée par un *OLDI* qui se déplace en passant constamment par ces 2 droites, en 2 points (ou plus) distincts (surface maximale : formée de tous les points pouvant être ainsi traversés par l'*OLDI*).

En chaque position, l'*OLDI* passe par un point - au moins - de chacune des 2 droites... mais l'un de ces points peut être le point d'intersection des deux droites, l'*OLDI* occupant alors l'autre droite !

Dphy**-8** ***Entre*** : A , B *et* C étant 3 points, « B *est entre* A *et* C » signifie :

un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C (ou de C à A), sans quitter la droite (AC), traverse B.

Si A, B et C sont trois points d'une ligne *l*, et si cette ligne *l* ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B *est un point de la ligne l, entre* A *et* C » signifie encore :
un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C, sans quitter la ligne *l*, traverse B.

Juste une petite mise en garde : dans une définition bien construite - qu'elle soit physique ou mathématique, chaque mot a un sens précis, que tu dois respecter ! Par exemple, un objet qui occupe *exactement* une ligne est un objet qui occupe *tous* les points de cette ligne - mais *aucun autre* (il ne déborde pas de la ligne).

En introduction aux « voyages », j'avais écrit que, pour un mathématicien, la géométrie reposait sur trois éléments de base : point, droite et plan. J'avais ajouté que « de base » voulait dire qu'on ne les définissait pas. J'ai tout de même voulu t'en donner des « dé-phy », mais je ne fais que déplacer la notion « d'élément de base » d'un cran, parce mes « dé-phy » s'appuient sur le concept d'objet ponctuel - que je raconte plus que je ne le définis... d'où son numéro zéro ☺ !

Deuxième croisière : les « solides ».

Première escale : qu'est-ce que l'**espace** ?

Je suis sûr que tu as déjà vu des dessins animés où le printemps terrassait l'hiver : au début, sur tout l'écran, un paysage hivernal sinistre, dans les tons sombres, des arbres tout morts, aucun mouvement... puis un trait de lumière apparaît dans un coin, commence à traverser l'écran : là où il est passé, tout devient vert et bleu, lumineux. Des feuilles poussent à toute allure sur les branches, des tas d'oiseaux surgissent de je ne sais où et se mettent à chanter !

Imagine maintenant, il y a près de 14 milliards d'années, la naissance de notre univers : au début, rien. Rien de rien ! Puis, un peu comme dans les dessins animés, un point s'impose dans ce rien. Puis une surface minuscule, autour de ce point : elle l'enferme, comme un sac. Puis le sac grossit, la surface enfle, enfle, enfle... partout à l'intérieur, il y a de l'existence : des ondes, de la matière, parfois de la vie. Et des points, que la matière et les ondes pourront traverser.
À l'extérieur, toujours rien (non, même pas de points : la notion d'endroit n'y a pas encore de sens !)

Eh, M'sieur… Et l'espace, dans tout ça ?

J'y viens, j'y viens... tu n'es vraiment pas poète !

Le sens du mot « espace » dépend de la personne à qui tu parles. Il peut s'agir de :

l'espace physique, celui des astronomes. C'est tout ce qui est à l'intérieur du sac : les points, la matière, les ondes... c'est un espace immense (il contient toutes les étoiles !) mais limité : « quelques » millions de milliards de milliards de kilomètres entre deux points extrêmement éloignés l'un de l'autre.

L'espace géométrique sur lequel s'appuient les mathématiques du collège : uniquement les points qui sont à l'intérieur du sac - mais avec l'idée que ce sac n'a pas de limites ! Il peut donc contenir des droites, des plans (un plan est une tranche de l'espace, une tranche dont l'épaisseur est de 1 point)...

D'autres espaces, encore, mais là, ils sont vraiment hors sujet !

L'espace géométrique, donc, est un immense ensemble de points. Les mathématiciens ont pris l'espace physique comme modèle, mais ils l'ont à la fois idéalisé et simplifié : idéalisé, parce que dans l'espace physique, aucun objet ne peut occuper un seul point - et parce que l'espace physique n'est pas illimité. Simplifié, parce que l'espace géométrique n'est qu'un ensemble d'endroits - les points, et que ces points ne sont pas soumis aux lois de la physique : pas de dilatation de l'espace géométrique à prendre en compte, pas d'interactions avec les objets ou les ondes.

Escale-terminus : qu'est-ce qu'un **solide** ?

T'es-tu déjà servi d'un moule ? Non, pas un moule à gâteaux ! Un « vrai » moule, un moule à objets (bon, d'accord, les gâteaux sont des objets, et les moules à gâteaux des vrais moules... enfin, presque, parce qu'ils ne sont pas fermés : tu ne peux pas donner la forme que tu veux à la partie supérieure du gâteau - et c'est normal, il doit pouvoir gonfler ☺).

Un (vrai) moule est une boîte que tu dois pouvoir fermer. Totalement, hermétiquement fermer !

Avant de fermer ton moule, tu le remplis (par un petit orifice) avec le liquide qui convient - ça peut-être de l'eau, de la résine, du plastique, un métal en fusion... puis tu fermes l'orifice et tu attends que le liquide durcisse : si c'est de l'eau, tu dois mettre le moule au congélateur - mais je ne te conseille pas l'eau, parce que, contrairement aux autres liquides, l'eau gelée prend plus de place que l'eau liquide et ton moule risque d'éclater !

Lorsque le liquide a cessé d'être du liquide, tu démoules le résultat de ton travail. Parfois, tu dois casser le moule pour y arriver. Si tout s'est bien passé, tu obtiens un objet solide (plus ou moins : les plastiques sont en général moins solides que les métaux) dont la forme correspond à la surface intérieure du moule. Cet objet est un solide au sens de la physique : un bloc de matière limité par une surface. Mais la matière physique est formée d'atomes et un atome, vu au microscope (un microscope très puissant), ça ressemble un peu à notre système solaire : plein de vide et de temps en temps un petit morceau de matière ! Donc, un solide physique n'occupe en réalité qu'une toute petite partie des points de l'endroit où tu le vois.

Et un solide au sens mathématique, alors ?

Oh là là, ce que tu es impatiente ! J'y arrive...

Personne ne peut construire de "vrais solides mathématiques », pas plus qu'il n'est possible de dessiner un point où une ligne. Nous sommes bien trop imparfaits pour ça. Dans un « vrai solide mathématique », la matière occuperait tous les points enfermés par la surface... et la surface serait une vraie surface, pas un morceau de gruyère. Alors, comme pour les points, les lignes, les surfaces, tout ce que nous pouvons faire, c'est - oui, tu as deviné - **imaginer** des solides « parfaits ». À partir de solides qui ne le sont pas !

(D'ailleurs, un « vrai solide mathématique » serait infiniment lourd, puisqu'il occuperait une infinité de points et que la matière contenue dans chacun de ces points pèserait quelque chose... pas grand chose, peut-être, mais une infinité de fois pas grand-chose, ça fait encore trop ! Et pour les mêmes raisons, tous les atomes de l'univers ne suffiraient pas à créer même un tout petit « vrai solide mathématique »)

Un solide mathématique est donc un solide imaginaire, qui occuperait tous les points enfermés dans un espace limité par une surface « étanche » - c'est-à-dire qui sépare tout l'espace géométrique en trois parties : l'espace extérieur (d'un côté de cette surface), la surface elle-même, l'espace intérieur (de l'autre côté de cette surface).

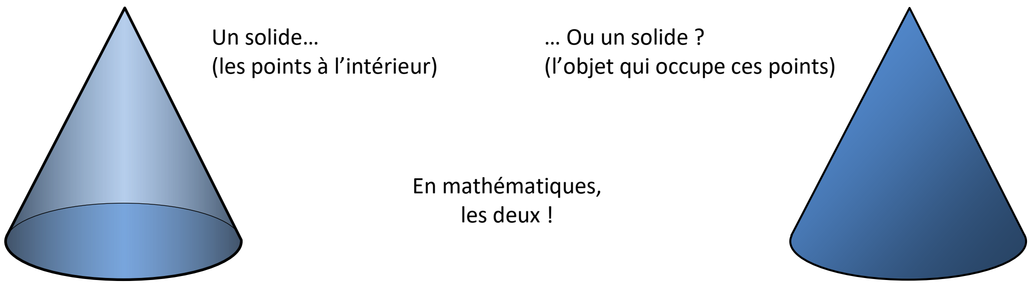
« Étanche » n'est pas un mot du vocabulaire mathématique, mais tu comprends ce que je veux dire, n'est-ce pas ? Aucune ligne ne peut rejoindre un point de l'extérieur à un point de l'intérieur sans traverser cette surface.

C'est ça, vous me prenez pour un demeuré ?

Mais non, justement.
Sinon, je ne te parlerais pas de tout ça ☺ !

Et maintenant, je dois t'avouer quelque chose : je suis très embêté. Vraiment très embêté ! Pourquoi ? Parce que, jusqu'à présent, j'ai bien réussi à faire la différence entre objets et endroits. Et je t'ai dit que la géométrie étudiait des ensembles de points, dont des endroits... mais en classe, ton prof va vraisemblablement te parler de « l'étude des solides ». Je le fais aussi, avec mes élèves - c'est ce qui est écrit dans les programmes officiels. Et un solide n'est pas un endroit ! Alors ?
La vérité, c'est que les mathématiciens n'ont jamais pu se mettre d'accord sur un nom pour « ensemble des points occupés par un solide » : on a essayé « espace » - mais c'était trop vague, ou « volume » - mais ce mot a servi à autre chose (je t'en parlerai plus tard)... finalement, tout le monde a fini par hausser les épaules et s'est dit que « solide », ça ferait l'affaire !

Ce qui fait qu'en mathématique, « solide » représente à la fois un objet et l'espace occupé par cet objet !
(Ce n'est pas très intelligent, d'accord... mais, tu verras, on s'y fait très bien)



… En conclusion :

D_{phy}-9 ***<u>Solide</u>*** : objet imaginaire, qui occuperait tous les points enfermés dans un espace limité par une surface « étanche » (qui sépare tout l'espace géométrique en trois parties : l'espace extérieur - d'un côté de cette surface, la surface elle-même, l'espace intérieur - de l'autre côté de cette surface),

ou **:** ensemble des points occupés par cet objet.

Quatrième voyage

en quelques excursions, 1 croisière et 2 escales

Alignés   ***Du même côté***   ***De part et d'autre***   ***Demi-droite***   ***Segment***

Sécants ou Parallèles

Cinq toutes petites excursions apéritives avant de commencer la croisière :

Ces cinq excursions sont des définitions - tes premières « vraies » définitions... même si elles utilisent des concepts (points, droites et « entre ») qui sont, eux, hors définition !

Je vais donner un numéro à chacune de ces définitions, et ces numéros - précédés de la lettre « D » - te permettront de les identifier tout au long de ce livre. Ce seront leurs noms... elles ne sont que les premières d'une grande famille !

D-1 ***Points alignés*** **:** des points d'une même droite.

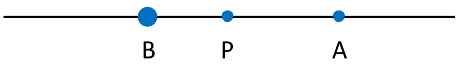
Tu te dis : ils sont sur une même ligne... mais ça n'aurait pas beaucoup d'intérêt : tu peux toujours imaginer une ligne qui passe par trois points, quels que soient ces points.

« Alignés » est un des faux amis les plus célèbres des mathématiques :
sur une même ligne, d'accord... mais pas n'importe laquelle !

D-2 ***Du même côté*** **:** Là encore, sans précision supplémentaire, tu parles de points d'une même droite.
Dans ce cas, A, B et P étant trois points, « **P** ***est du même côté de*** **B** ***que*** **A** » signifie :

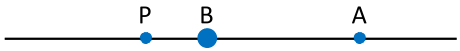
ou bien A est entre B et P,

ou bien P est entre B et A.

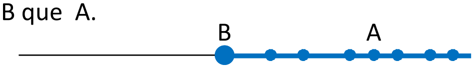


D-3 ***De part et d'autre*** **:** une fois de plus, tu parles habituellement de points d'une même droite.
A, B et P étant trois points, « **P** ***et*** **A** ***sont de part et d'autre de*** **B** » signifie alors :

B est entre P et A.



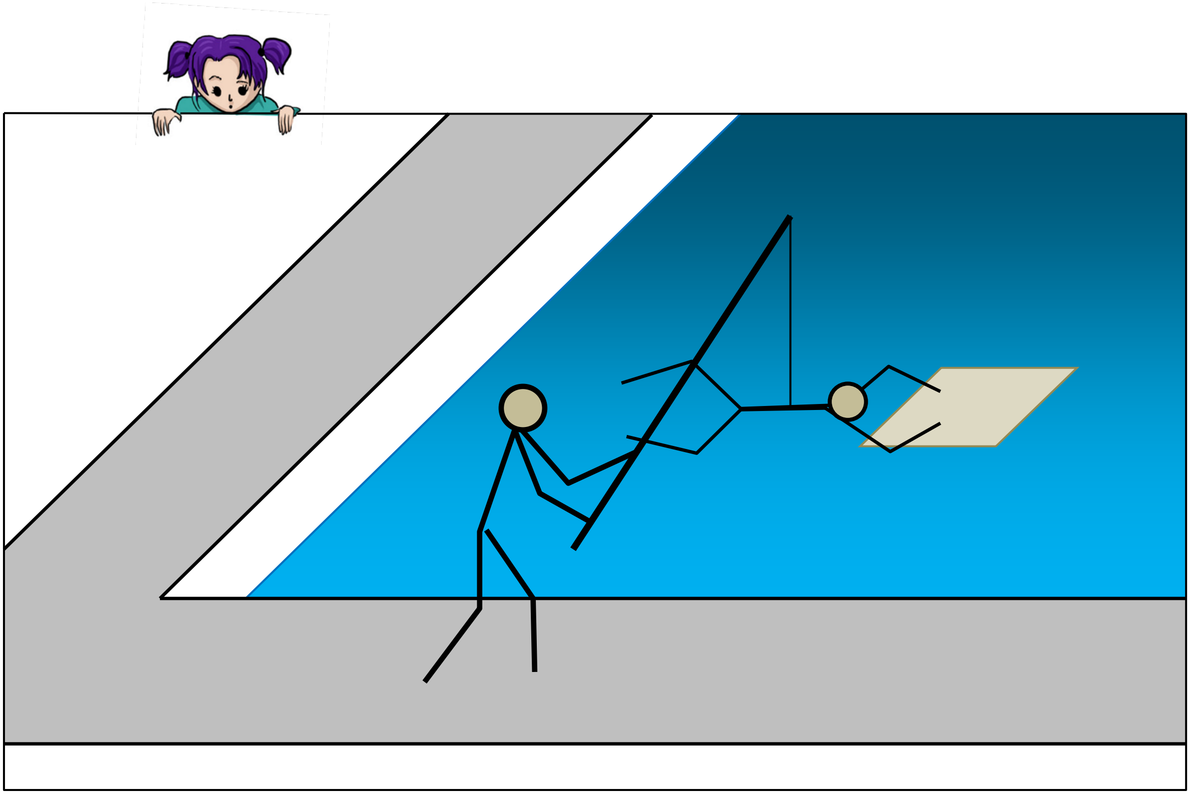
D-4 ***Demi-droite*** **:** A et B étant deux points, ***la demi-droite*** **[BA)** est l'ensemble des points de (AB) qui sont du même côté de B que A.



D-5 ***Segment*** **:** A et B étant deux points,
le segment [AB] est l'ensemble des points de (AB) situés entre A et B.
(Je suis sûr que tu l'avais deviné.)

Croisière unique : points, droites et plans, positions.

Oui, toute une croisière autour des positions ! Mais elles en valent la peine, tu vas voir. Pour mieux les explorer, je vais - tout à l'heure - utiliser quelques accessoires courants : une piscine, un maître nageur avec sa gaffe (tu sais bien, ce long bâton auquel sont désespérément accrochés les nageurs débutants), une planche flottante (mais si, ça aussi, tu en as déjà vu : une « planche » rectangulaire en plastique léger que les mêmes nageurs débutants tiennent parfois devant eux - quand ils ne jouent pas avec), un nageur - pas nécessairement débutant, un peu de ficelle...



Au cours des voyages précédents, tu as pu préciser ta vision de ce qu'étaient un point, une droite, un plan. Maintenant, tu as suffisamment bourlingué pour pouvoir commencer à « construire de la géométrie » : associer des points, des droites, des plans dans tout un tas de positions différentes et créer des « figures ».

Pourquoi « commencer à » ? Parce qu'il te manque encore de savoir quelles positions sont possibles, quelles positions ne le sont pas !

Allez, embarque !

Première escale : positions de base, premiers métaxiomes.

Tu te rappelles les pages d'introduction, sur le raisonnement ? Sinon, tu as vraiment intérêt à les relire ! Il est temps de commencer à écrire les articles de la « règle du jeu » de la géométrie : ceux que j'appelle des « métaxiomes » et sur lesquels vont reposer toutes nos constructions, tous nos raisonnements.

Je les ai composés de façon à ce qu'ils te paraissent « évidents », et j'espère que ce sera le cas ! La plupart sont de vrais axiomes que j'ai empruntés à Hilbert (des affirmations que personne ne peut démontrer), quelques-uns ne sont en réalité que des théorèmes (démontrables à partir de vrais axiomes), mais leur démonstration risquerait de te lasser, alors je préfère les traiter comme des axiomes.

Comme pour les définitions, je vais donner un numéro à chacun de ces métaxiomes, et ces numéros - précédés de la lettre « M » - te permettront de les identifier tout au long de ce livre.

Un petit rappel : une construction solide ne peut pas reposer sur de l'à-peu-près et les mots que j'utilise ont un sens précis, que tu ne dois pas négliger. Par exemple « exactement un » signifie précisément : un et un seul... ni zéro, ni deux, ni plus de deux.

Et pour finir, deux points de vocabulaire... en fait, je vais même en faire des définitions :

D-6 ***Figure*** : tout ensemble composé de points.
(Un point - ou plusieurs, une ligne, une surface…)

D-7 ***Figures distinctes :*** deux figures qui ne sont pas exactement composées des mêmes points.
(Il doit donc y avoir au moins un point qui est dans l'une des figures et pas dans l'autre... ce qui permet de les *distinguer* ! En particulier, deux points distincts sont simplement deux points différents.)

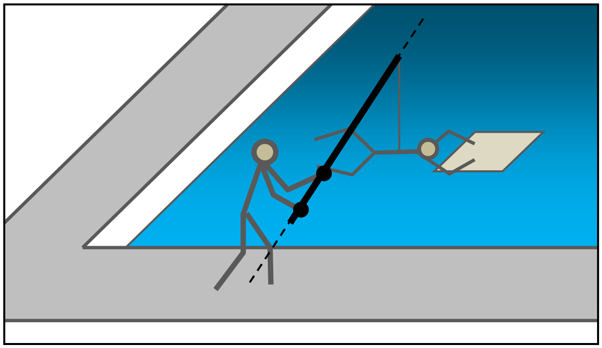
Maintenant, tu es équipé pour aborder les premiers métaxiomes !

M-1 Il passe exactement une droite par deux points distincts.

Imagine une droite qui passe dans la gaffe

La position de la gaffe est déterminée par les 2 poings du maître-nageur…

Imagine des points dans ces poings ☺



Et regarde, M-1 t'apporte un premier théorème et deux nouvelles définitions :

comme pour les définitions et les métaxiomes, je vais donner un numéro à chacun des théorèmes qui apparaîtront dans le livre, mais ces numéros seront précédés de la lettre « T » !

T-1 Lorsque deux droites sont distinctes, soit elles ont exactement un point en commun, soit elles n'ont aucun point commun.

(Si elles avaient plus d'un point en commun, elles en auraient au moins deux … Et ***d'après M-1****, par 2 points il ne passe pas 2 droites distinctes !)*

D-8 ***Droites sécantes*** **:** deux droites qui ont exactement un point en commun.
On dit alors que les droites se coupent.

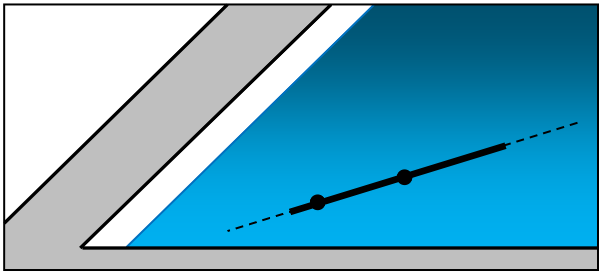
D-9 ***Point d'intersection de deux droites sécantes*** **:** le point commun à ces deux droites.
On dit alors que les droites se coupent « en ce point ».

M-2 Si deux points d'une droite sont dans un plan, alors toute la droite est contenue dans le plan.
(*Tu diras alors qu'il s'agit d'une droite « du plan »*)

Imagine un plan qui prolonge la surface de la piscine (lorsqu'il n'y a pas du tout de vagues, la surface de l'eau est « presque » plane)

Imagine que le maître-nageur a posé ses 2 poings au contact de l'eau - lui, je ne le dessine plus ! … Alors toute la gaffe touche l'eau.

Oui, je sais, s'il la lâche, elle flotte !



Et l'arrivée de M-2 me permet de te proposer une dixième définition …

D-10 ***<u>Figures coplanaires</u>*** **:** des figures d'un même plan.

… Et un nouveau théorème :

T-2 Une droite qui n'est pas contenue dans un plan a au maximum un point commun avec ce plan.
*(Si elle avait plus d'un point commun avec le plan, elle en aurait au moins deux… Et **d'après M-2**, la droite serait alors contenue dans le plan !)*

Et maintenant, on revient sur les métaxiomes :

M-3 Il passe exactement un plan par trois points non-alignés.

Ou **:** il passe exactement un plan par une droite et un point extérieur à cette droite.

Ou encore **:** il passe exactement un plan par deux droites sécantes.

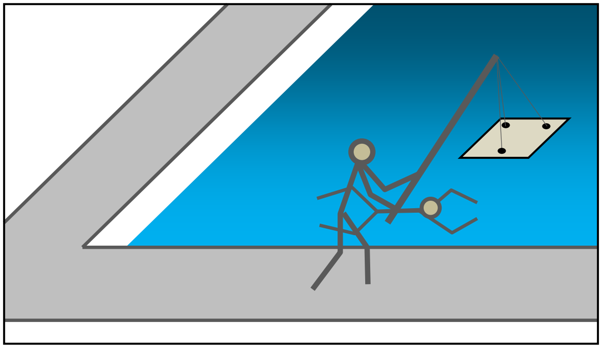
Il est simple, **en utilisant M-1 et M-2**, de se rendre compte que ces trois formulations de M-3 sont interchangeables. Comme, sur le terrain, elles correspondent à trois situations apparemment différentes, je n'ai pas voulu en privilégier une par rapport aux deux autres.

Imagine maintenant que le maître-nageur veut suspendre la planche au-dessus de l'eau, devant le nageur (comme une carotte devant un âne ? ☺) :

s'il ne veut pas que la planche bascule, il doit bien la fixer en 3 points non-alignés, non ?

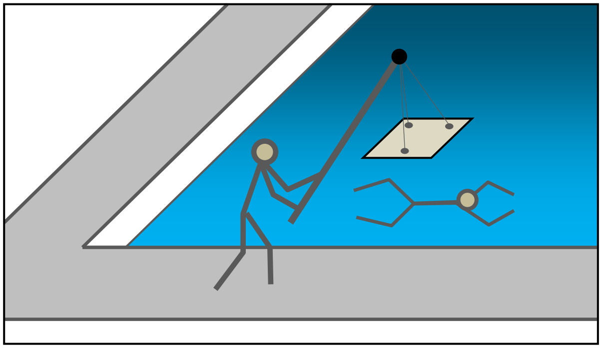
Et tu peux imaginer un plan qui prolonge cette planche, n'est-ce pas ?

(Pourquoi crois-tu que ça s'appelle une **<u>plan</u>**che ?)



M-4 Il existe au moins un point extérieur à un plan.

Et là, tu vois bien que le haut de la gaffe ne touche pas la surface de l'eau ?
(Que tu peux, comme tu l'as vu pour M-2, prolonger en un plan.)

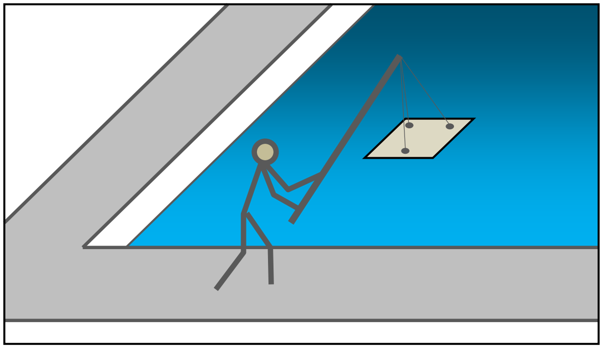


M-5 Lorsque deux plans sont distincts, soit ils ont exactement une droite en commun, soit ils n'ont aucun point commun.

Imagine le plan qui prolonge la planche - on l'appelle « plan de la planche », et celui de la surface de l'eau.

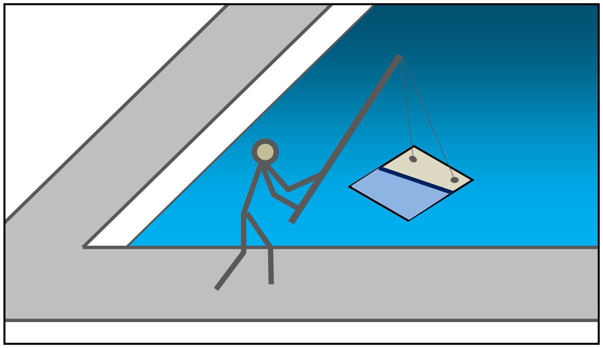
Si la planche flotte, tu as un seul plan !

Si le maître-nageur la soulève sans la faire basculer du tout (pas facile !), tu as 2 plans qui n'ont aucun point commun…



…Mais si l'un des fils lâche, voilà ce qui arrive ! Et tu as bien 2 plans qui ont exactement une droite en commun !

(D'un côté de cette droite, la planche est sèche, de l'autre pas)



Et naturellement, M-5 t'apporte deux nouvelles définitions :

D-11 ***<u>Plans sécants</u>*** **:** deux plans qui ont exactement une droite en commun.
On dit alors que les plans se coupent.

D-12 ***<u>Droite d'intersection de deux plans sécants</u>*** **:** la droite qui est commune à ces deux plans.
On dit alors que les deux plans se coupent selon cette droite.

<u>Escale-terminus</u> : les parallélismes et leurs métaxiomes.

Pourquoi « les » parallélismes ? Parce qu'en géométrie, deux sortes d'objets (et deux seulement) peuvent être parallèles : des plans ou des droites... ce qui n'empêche toutefois pas - même les mathématiciens sont imparfaits ! - de parler de parallélisme entre une droite et un plan, de parallélisme entre segments, de parallélisme entre lignes courbes.

Bon, commençons par les plans :

D-13 ***<u>Plans parallèles</u>*** **:** soit deux fois le même plan,
soit deux plans distincts
qui n'ont pas de point commun.

Ou **:** deux plans qui ne sont pas sécants.
(Donc éventuellement deux fois le même plan !)

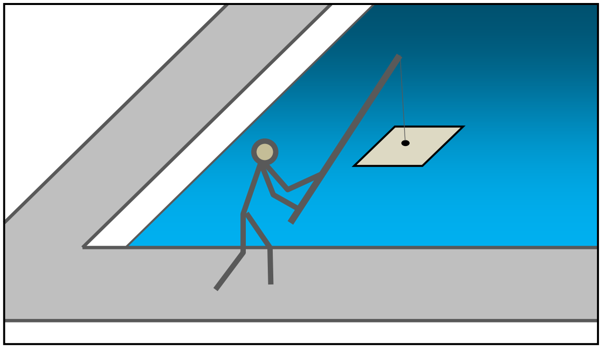
« Les plans P_1 et P_2 sont parallèles » se note : P_1 **//** P_2

M-6 Par un point, il passe exactement un plan parallèle à un plan donné.

Et si le maître-nageur a l'idée bizarre de suspendre la planche par un seul point ? (Il manque peut-être de fil ?)

Si le point touche l'eau, la planche flotte : le plan de l'eau et celui de la planche sont le même plan !

Si le point est au-dessus de l'eau, le plan de la planche penchera presque toujours d'un côté vers celui de l'eau.
SAUF dans une unique position, pour laquelle les 2 plans ne se couperont pas

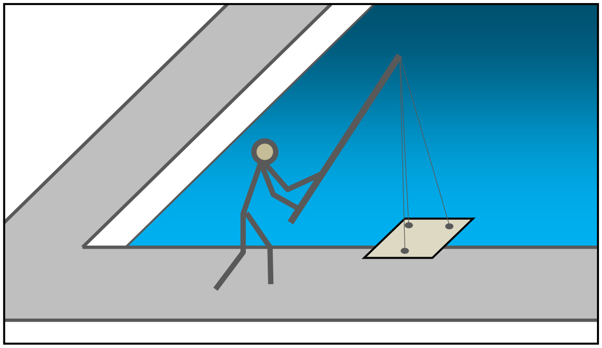


M-7 Deux plans qui sont parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.

Imagine que le maître-nageur ait réussi à parfaitement équilibrer la planche, lorsqu'elle était posée sur le rebord de la piscine. Alors, lorsqu'il soulève la gaffe, le plan de la planche reste parallèle à celui de la margelle (Là où il marche. Attention, ça glisse !) ...

Et habituellement, la surface de l'eau est parallèle au plan de la margelle.

Alors le plan de la planche est également parallèle à la surface de l'eau.



ce qui t'offre un nouveau théorème, et pour la première fois, une démonstration rédigée.
(À partir d'ici, je rédigerai **toutes** les démonstrations !)

T-3 Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.

Démonstration :

Soient P_1 et P_2 deux plans parallèles.
Suppose qu'il existe un plan P_3 qui coupe P_1 sans couper P_2 :

P_3 serait alors parallèle à P_2… Mais P_2 est déjà parallèle à P_1, donc, **d'après M-7**, P_1 et P_3 seraient parallèles !

Seulement voilà : **d'après D-13**, P_3 ne pourrait pas à la fois couper P_1 et lui être parallèle, donc ta supposition de départ ne tient pas la route : il n'existe pas de plan qui couperait P_1 sans couper P_2 !

Et maintenant, passons aux droites :

D-14 ***<u>Droites parallèles</u>*** **:** soit deux fois la même droite,
soit deux droites **coplanaires** qui ne se coupent p

Ou **:** droites **coplanaires** qui ne sont pas sécantes.
(Donc éventuellement deux fois la même droite !)

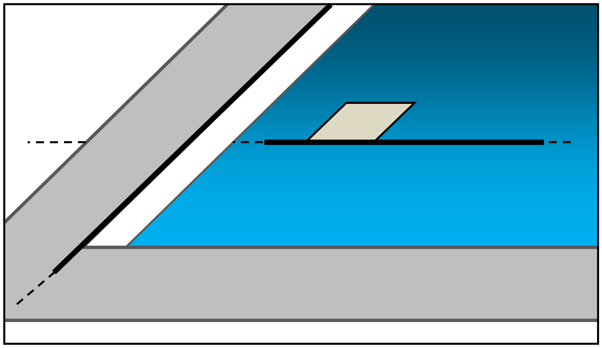
« Les droites *d* et *t* sont parallèles » se note : *d // t*

Fais bien attention au mot « **coplanaires** » :

Il existe un tas de droites
qui ne se coupent pas,
mais qui ne sont pas parallèles !!!

C'est juste qu'elles ne vivent pas dans le même plan, alors elles n'ont pas la possibilité de se rencontrer !

Regarde par exemple les 2 droites que j'ai mises en évidence (la planche flotte sur l'eau, dont le plan est en-dessous de celui de la margelle)

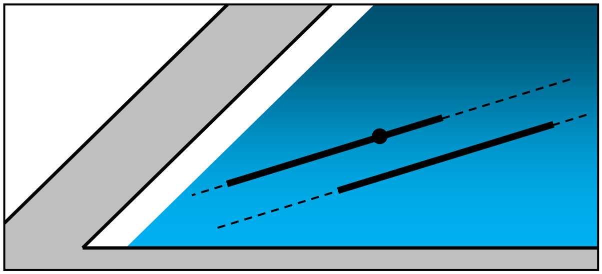


M-8 Par un point, il passe exactement une droite parallèle à une droite donnée.

Là, tu as 2 gaffes qui flottent.
(elles sont donc toutes les 2 <u>dans le même plan</u>, celui de la surface de l'eau)

Imagine que l'une d'elle peut pivoter autour d'un point fixe.
(quelqu'un la tient peut-être d'une main ?)

Une droite qui prolonge cette gaffe coupe celle qui prolonge l'autre gaffe…
SAUF dans <u>une</u> position !



Bien sûr, si le point que tu choisis est déjà un point de la droite donnée, la parallèle à cette droite donnée, passant par le point que tu as choisi, est… roulements de tambours … Elle-même !

Et encore un théorème :

T-4 Deux droites parallèles distinctes définissent un plan.

Ou **:** il passe exactement un plan par deux droites parallèles distinctes.

Démonstration :

soient d_1 et d_2 deux droites parallèles, et A un point de d_1.

D'après D-14, il existe un plan qui contient d_1 et d_2 : je l'appelle P_1.
Comme A est un point de d_1, P_1 contient A.
Mais **d'après M-3**, P_1 est le seul plan passant par A et contenant d_2…

Alors P_1 est le seul plan contenant d_1 et d_2 !

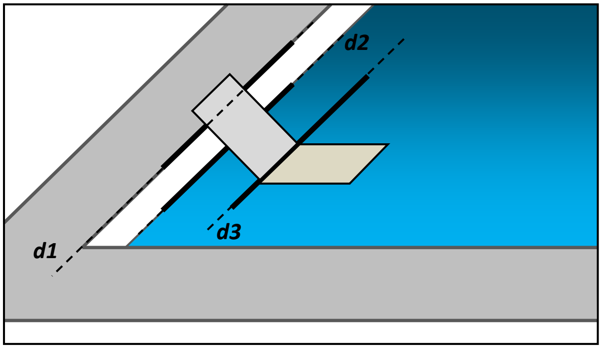
M-9 Deux droites qui sont parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Imagine que tu as attaché ensembles 2 planches, pour en faire une sorte de siège appuyé contre le bord de la piscine.

Dans le plan vertical (une des parois de la piscine), *d1* et *d2* sont parallèles et dans le plan horizontal (surface de l'eau), *d2* et *d3* le sont aussi.

Donc *d1* et *d3* sont parallèles !

(Et donc coplanaires : *d1* et *d3* sont toutes les 2 dans le plan qui prolonge le dossier du siège !)



Les théorèmes continuent :

T-5 Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite **de leur plan** qui coupe l'une coupe l'autre.

Démonstration :

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles.
Suppose qu'il existe une droite d_3, dans le plan défini par d_1 et d_2, qui coupe d_1 sans couper d_2 : comme d_3 et d_2 sont coplanaires, d_3 est alors parallèle à d_2…

Mais d_2 est déjà parallèle à d_1, donc, **d'après M-9**, d_1 et d_3 sont parallèles !
Et tu retrouves le raisonnement de T-3 : d_3 ne pourrait pas à la fois couper d_1 et lui être parallèle, donc ta supposition de départ ne tient pas la route : il n'existe pas de droite, dans le plan défini par d_1 et d_2, qui couperait d_1 sans couper d_2 !

D-15 ***<u>Droite et plan sécants</u>*** **:** une droite et un plan qui ont exactement un point commun.
On dit alors que la droite et le plan se coupent en ce point.

Et pour en terminer, une définition « mixte », qui relie droite et plan :

D-16 ***<u>Droite et plan parallèles</u>*** **:** une droite et un plan qui ne sont pas sécants.
(Donc une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan !)

… suivie d'un théorème :

T-6 Lorsqu'une droite est parallèle à un plan,
toute droite parallèle à cette droite est également parallèle à ce plan.

Démonstration :

soit un plan P_1 et une droite d_1, parallèle à ce plan ;
soit encore une droite d_2, parallèle à d_1.

Si d_2 est d_1, d_2 est évidemment parallèle à P_1…
Sinon, appelle P_2 le plan défini par d_1 et d_2.

Maintenant, il y a exactement deux possibilités :

Ou bien P_2 et P_1 sont parallèles, alors :

… ou bien P_2 et P_1 sont le même plan, et comme d_2 est contenue dans ce plan, elle ne le coupe pas en un point, donc, **d'après D-16**, elle est bien parallèle à P_1.

... ou bien P_2 et P_1 sont deux plans distincts. En ce cas, **d'après D-13**, ils n'ont aucun point commun : d_2, qui est contenue dans P_2, ne peut donc pas couper P_1. Donc, **d'après D-16**, elle lui est encore parallèle !

Ou bien P_2 et P_1 ne sont pas parallèles, alors :

D'après M-5, ils ont en commun une droite, que j'appelle d_3.

Si d_1 et d_3 se coupaient en un point (unique), ce point serait un point de d_1 et un point de P_1 (puisque d_3 est contenue dans P_1). Cela voudrait dire que d_1 aurait un point commun unique avec P_1 (d_1 est contenue dans P_2, donc d_1 ne peut avoir comme points communs avec P_1 que des points de d_3).

Mais **d'après D-16**, ce n'est pas possible, car d_1 et P_1 sont parallèles…Donc d_1 et d_3 sont deux droites coplanaires non sécantes, autrement dit, **d'après D-14** elles sont parallèles !

Mais comme d_2 est parallèle à d_1, elle est également, **d'après M-9**, parallèle à d_3... elle ne peut donc pas plus couper P_1 que d_1, pour les mêmes raisons !

… de deux non-théorèmes :

T-FAUX-01 *Lorsque une droite est parallèle à un plan,
tout plan parallèle à cette droite est également parallèle à ce plan.*

T-FAUX-02 *Lorsque deux droites sont parallèles à un plan,
ces deux droites sont également parallèles entre elles.*

Pourquoi T-FAUX-01 est-il faux ?

Regarde le dessin, à côté de M-9 : tu crois que les deux plans qui contiennent les deux planches attachées ensemble sont parallèles ? Non, n'est-ce pas ? Et pourtant, **d'après D-16**, ces deux plans sont parallèles à *d3*… Et, même, **d'après T-6**, à toute droite parallèle à *d3* !

Et T-FAUX-02 ?

D'après D-16, deux droites d'un plan sont parallèles à ce plan !
Mais deux droites d'un plan sont rarement parallèles entre elles. Regarde à nouveau le dessin, à côté de M-9 : la droite *d3* et une droite qui contient l'un des côtés latéraux du siège sont toutes les deux des droites du plan de l'eau… Donc elles lui sont parallèles.
Mais elles sont sécantes entre elles !

… et d'un théorème (provisoirement) final :

T-7 Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan.

En particulier, toute droite parallèle à une droite d'un plan, et passant par un point de ce plan, est une droite de ce même plan.

Démonstration :

j'appelle P un plan, *d* une droite de ce plan, et *t* une droite parallèle à *d*.

<u>Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan</u> :

si *t* est une droite de P, elle est, **d'après D-16**, parallèle à P !

Et sinon :

D'après T-4, *d* et *t* définissent un plan. Comme *t* n'est pas une droite de P, ce plan n'est pas P... mais, tout comme P, il contient *d* : **d'après M-5**, ce plan et P ont même exactement *d* en commun ! Alors, comme *t* est une droite de ce plan, si *t* coupait P, ce serait en un point de *d*…
Mais *t* et *d* sont parallèles : elles n'ont donc pas de point commun.

Donc *t* est bien parallèle à P !

<u>Toute droite parallèle à une droite d'un plan, et passant par un point de ce plan, est une droite de ce même plan</u> :

si *t*, dont tu viens de voir qu'elle est parallèle à P, passe en plus par un point de P, alors, **d'après D-16**, cette droite est une droite de P.

(Sinon, elle aurait un seul point commun avec P : *t* et P seraient sécants !)

Cinquième voyage

en 1 croisière, 3 escales et 3 escapades

Longueur ***Segment-unité*** ***Fils-unité*** ***Distance*** ***Mètre***

Aire ***Carré-unité*** ***Feuilles-unité*** ***Mètre-carré*** ***Volume*** ***Cube-unité*** ***Blocs-unité*** ***Mètre-cube***

Croisière unique : de la mesure d'une ligne à la distance entre deux points.

Première escale : à la découverte d'un segment-unité, de ses fils... Puis d'une tribu de segments-unité.

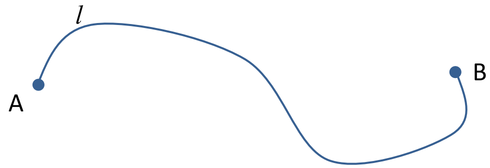
Qui commence par une définition :

D-17 ***Longueur*** : mesure d'une ligne (comparaison de cette ligne à une ligne de référence).

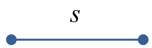
Mesurer, c'est comparer ! Et ça, c'est vrai quel que soit l'élément que tu veux mesurer. Aujourd'hui je m'intéresse aux lignes, alors je vais préciser : mesurer une ligne, c'est la comparer à une autre ligne.

À quelle autre ligne ? À une ligne qui te plaît, une ligne que tu choisis ! Mais pour ne pas se compliquer la vie (et pour ne pas trop s'éloigner des « vrais » axiomes de la géométrie), tu vas te limiter aux segments.

Allez, on commence : tu veux mesurer la ligne l,
qui a comme extrémités A et B
(si elle n'était pas limitée,
tu ne pourrais pas la mesurer !)



Pour commencer, tu te choisis un segment,
par exemple celui-ci - je l'appelle s :



Il te plaît ? Sinon, tu peux en choisir un autre...
Mais ça t'obligera à refaire tous les dessins
à partir de ton nouveau segment ☺

s **devient ton segment-unité. C'est à lui que tu vas comparer** l.

Pourquoi segment-*unité* ?

En mathématiques, mais aussi en physique, en économie, en... en fait, partout, une unité c'est un élément qui a été choisi comme référence (parce qu'on s'en sert plus souvent que les autres, ou parce qu'il est très connu, ou parce qu'on l'aime bien...), celui auquel on a décidé de comparer tous les autres éléments de la même famille. Le segment que tu as choisi - d'accord, que j'ai choisi pour toi - est devenu ton segment de référence : c'est donc ton segment-unité.

Comme tu veux comparer l à s, tu aimerais répondre à une question qui ressemblerait à :

« combien de fois l est-elle plus grande que s ? »

Mais comme tu n'as pas défini « plus grand », cette question n'est pas très claire, alors, après réflexion (tu vois que tu réfléchis !), tu la remplaces par :

« combien de fois l peut-elle contenir s ? »

C'est déjà mieux, mais ça manque encore un peu de rigueur, pour deux raisons :

d'une part, s est une ligne droite, et pas l, donc il va être difficile à l de contenir s...

D'autre part, s est un segment, donc un ensemble de points, un endroit.
Tu ne peux pas le déplacer pour qu'il vienne en l !

Alors, tu réfléchis encore un peu plus, et finalement, tu inventes le « **fil-unité** » : tu **imagines** un objet linéaire souple qui, au départ, occupe exactement s, mais que tu vas ensuite déplacer et modeler pour lui permettre d'occuper une partie de l. Et même, tant qu'à faire, imagine que tu en imagines plusieurs. Tout un stock ! Tu en imagines un premier, tu l'enlèves de s (tu le poses soigneusement dans une boîte à fils-unité), tu en imagines un second, etc...

Du coup, te voici avec une 10ème « dé-phy » :

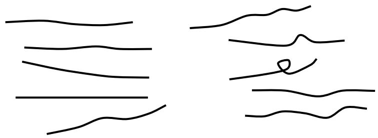
D$_{phy}$-10 ***<u>Fil-unité</u>*** : objet linéaire souple qui, à sa création, occupe exactement le segment-unité.
(Mais tu peux ensuite le déplacer et comme il est souple, le modeler.)

Ces fils-unité vont devenir des ambassadeurs de s : *si je m'y prends bien*, ils vont pouvoir représenter s n'importe où dans l'espace ! Avec deux avantages sur le segment :

un fil est un objet, tu peux le déplacer,

un fil est souple, tu peux le courber.

s ... et ton stock de fils-unités :



Pourquoi *si je m'y prends bien* ? Parce qu'il manque encore une propriété aux fils-unité, pour que je puisse vraiment les utiliser. Cette propriété, je vais la leur imposer par un métaxiome... évidemment, ce sera un métaxiome physique :

M$_{phy}$-1 Un fil-unité déplacé ou modelé reste un fil-unité.

Eh, oh, monsieur !
Vous vous ...
Moquez de moi,
là !
C'est ça ?

Mais non, pas du tout. Promis ! Un métaxiome, ça paraît toujours complètement évident (parce que ça correspond bien au monde que tu connais) et pourtant, ça ne l'est pas !

Qu'est-ce qu'affirme ce métaxiome qui te paraît si évident ?

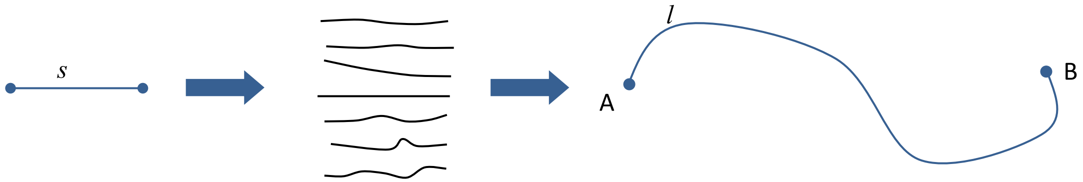
« Tout simplement » qu'un fil unité n'a aucune élasticité : le déplacer ou le modeler ne l'allongera pas, ne le raccourcira pas !

Et ce « tout simplement » n'a rien d'évident : dans notre univers physique, même les objets qui te paraissent le plus rigide ont une certaine élasticité.

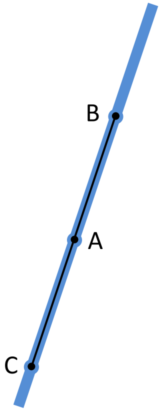
D'où la nécessité de M$_{phy}$-1 !

Et maintenant, ta question, celle qui va te permettre de comparer l à s, devient :

« combien de fils-unité consécutifs sont-ils nécessaires pour occuper exactement l ? »
(Consécutifs veut dire que tu les places bout-à-bout)



La réponse arrive, patience... laisse-moi d'abord te parler de la tribu des segments-unité. Tu vas voir que M_{phy}-1 n'est pas si insignifiant que ça : grâce à lui, je vais pouvoir passer de s, segment-unité isolé, à un ensemble infini de segments-unité. Regarde :



je choisis un point quelconque de l'espace.
Je l'appelle A - oui, je sais... comme d'habitude !

Maintenant, je choisis une droite qui passe par A. N'importe laquelle.
Puis je place deux fils-unité sur cette droite,
partant tous les deux de A - mais de part et d'autre de A.

J'appelle B et C les points de la droite qui correspondent aux autres extrémités des deux fils.

Et c'est fini : comme s, [AB] et [AC] sont deux segments exactement occupés par un fil-unité...
Ils peuvent alors, à leur tour, servir à fabriquer des fils unité : [AB] et [AC] sont donc également des segments-unité, et s n'est plus tout seul !

Comme je peux répéter cette construction avec n'importe quelle autre droite passant par A, puis avec n'importe quel autre point de l'espace et n'importe quelle autre droite passant par ce point...
Je découvre que s n'est qu'un segment-unité parmi des milliards d'autres !

Dommage, je m'y étais attaché !

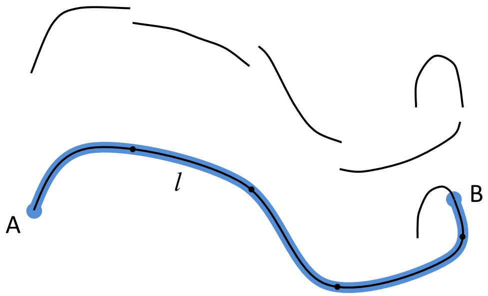
Bon, mine de rien, on s'est pas mal promenés. Et maintenant, je reviens à ta question. :

Deuxième escale : longueur.

Combien de fils-unité consécutifs sont-ils nécessaires pour occuper exactement l ?

Ou **: en partant de A et en occupant *l* combien de fils-unité consécutifs sont-ils nécessaires pour atteindre B ?**

Apparemment,
cinq fils-unité…
Mais le cinquième dépasse B :



J'ai épaissi le trait qui représente l
pour que tu voies mieux
les fils-unité qui l'occupent ☺

Où faudrait-il couper le cinquième fil-unité pour qu'il atteigne exactement B ?
Et comment l'exprimer ?

Répondre à ces questions, c'est déterminer la longueur de l, dans l'unité s.

Cette notion de longueur est immensément importante, c'est à travers elle que les nombres s'invitent en géométrie ! Alors, je vais prendre le temps de l'approfondir.

Pour pouvoir m'exprimer correctement, il me manque encore une définition et deux métaxiomes. Les deux métaxiomes sont physiques : ils font apparemment le lien entre les lignes, les fils-unité et les nombres entiers. Apparemment, parce qu'en réalité le deuxième ouvre les portes de la géométrie à bien d'autres nombres : les « fractions » - que les mathématiciens appellent « nombres rationnels », et même les « nombres réels »… mais les « réels », ce n'est vraiment pas pour tout de suite. Patience !

D-18 ***<u>Unité de longueur</u>*** : un segment que tu as choisi comme segment-unité
- ou n'importe lequel des autres segments-unité qui lui sont associés.

(Chacun d'entre eux peut servir de segment de référence.)

Ou le nom qui a été donné à cet ensemble de segments, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.

(Par exemple : le mètre, le pouce, … j'y reviendrai bientôt.)

M$_{phy}$-2 A et B étant deux points d'une ligne et un segment-unité étant choisi, il est toujours possible, en occupant la ligne depuis A par des fils-unité consécutifs, de dépasser B.

(À rapprocher, bien sûr, de : tout nombre entier peut être dépassé…
juste au cas où tu ne l'aurais pas vu. ☺)

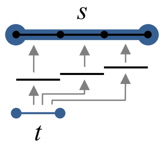
Ça y est, vous recommencez à me prendre pour un idiot !

Non, non… mais personne n'est parfait.
Oh là là, qu'est-ce que tu es susceptible !

M$_{phy}$-3 Une unité de longueur et un nombre entier n, supérieur à 1, étant choisis, il existe toujours une autre unité de longueur, et une seule, dont n fils-unité consécutifs occupent exactement un segment-unité de l'unité de longueur initiale.

Traduction libre : à partir d'une unité de longueur, tu peux toujours créer une nouvelle unité, n fois plus petite que la première.

Par exemple, si s est le segment-unité initial, et si n est égal à 3,les segments-unité de la nouvelle unité de longueur ressembleront au segment t :



Et je peux recommencer avec la nouvelle unité ?
Pour en obtenir une encore plus petite ?
Ça s'arrête où ?

Bien vu !
D'après M$_{phy}$-3, ça ne s'arrête pas, justement.
Intéressant, non ?

Maintenant, je peux enfin répondre aux questions sur le cinquième fil-unité :

puisque ce cinquième fil-unité dépasse B, tu vas le remplacer par des fils-unité d'une unité de longueur plus petite. Par exemple 10 fois plus petite que s. Comme si tu observais ce cinquième fil-unité avec une loupe qui grossit 10 fois. Et là, deux possibilités :

ou bien l'un des fils-unité de cette petite unité atteint exactement B : par exemple le 7ème fil.

Alors l est exactement occupée par 4 fils-unité de s et 7 fils-unité de «1 dixième de s».
En système décimal, tu l'écris : longueur de l = 4,7 unités s

ou bien l'un des fils-unité de la petite unité traverse B.

Alors tu recommences, avec une nouvelle unité, qui sera le dixième de « l'unité dixième », donc le centième de l'unité s. Etc.
Autrement dit, tu observes maintenant le voisinage de B avec un microscope qui grossit 100 fois, 1000 fois... et avec un fil-unité adapté à ton grossissement : 100 fois plus petit que s, 1000 fois...

Jusqu'à ce que :

ou bien l'un des derniers fils-unité créés (peut-être très petit) atteigne exactement B,

ou bien tu n'aies plus envie de continuer,

ou bien tu ne puisses plus continuer, parce que la précision de tes instruments ou les traits de ton dessin ne le permettraient plus : les fils-unité que tu créerais ne seraient plus discernables à travers tes instruments, où seraient « avalés » par l'épaisseur des traits.

Dans le premier cas, tu peux conclure avec exactitude :

par exemple longueur de l = 4,738 unités de s.

Dans les deux autres cas, tu te contentes d'encadrer la longueur de l
entre la longueur de la ligne qui s'arrête au premier point du dernier fil-unité qui traverse B
et la longueur de la ligne qui s'arrête au dernier point de ce fil-unité.

Par exemple : la longueur de l est entre 4,738 et 4,739 unités de s.

Mais si j'avais des instruments parfaits, et des dessins parfaits... et du temps, je finirais quand même par tomber sur un fil unité qui atteindrait exactement B, non ?

Et bien non, pas du tout !

Peut-être parce que la réduction des fils-unité par 10 n'est pas la bonne : peut-être que tu y arriverais, par exemple, en réduisant par trois à chaque fois ?... ou par des nombres entiers différents à chaque niveau de réduction ? Mais dans ces cas-là, tu dois abandonner l'écriture décimale pour une écriture fractionnaire.

Ou peut-être parce que le mécanisme de réduction par un nombre entier n ne permet pas de déterminer la longueur de l en unités s : là, tu abordes les nombres réels dits « irrationnels ». Je t'en dirai plus dans un autre livre, sur les nombres. Mais rien ne t'empêche de te renseigner ailleurs ☺

Cette longue escale avait commencé par une définition. Que dirais-tu de la conclure par un métaxiome ? Juste après une nouvelle « dé-phy » :

D$_{phy}$-11 ***<u>Longueur d'une ligne, en unité s</u>*** **:** le nombre de fils-unité consécutifs du segment-unité s nécessaires pour occuper exactement cette ligne.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)

M-10 Soient l_1 et l_2 deux lignes limitées ayant une extrémité en commun, et n'ayant aucun autre point commun que cette extrémité ; soit l la ligne formée de l'ensemble des points de l_1 et l_2.
Alors, pour toute unité de longueur : la longueur de l est la somme des longueurs de l_1 et de l_2.
Oui, je sais, je sais : comme tous les métaxiomes, il paraît évident. Et il l'est... lorsque les longueurs sont rationnelles !

<u>Escale-terminus</u> : de la longueur à la distance.

Je ne peux pas te laisser quitter cette croisière sans te mettre en garde contre une confusion répandue entre longueur et distance. Mais ce n'est qu'une mise en garde, et nous étudierons ensemble quelques distances particulières... un peu plus tard !

Une **longueur** associe un nombre à **un** élément géométrique : **une ligne limitée**.

Une **distance** associe un nombre à **deux** des trois « **éléments de base** » de la géométrie.

Au choix :

deux points,	deux droites,	deux plans.
un point et une droite,	une droite et un plan,	
un point et un plan,		

Ce qu'on appelle « distance entre deux éléments de base », c'est la longueur de la plus courte des lignes qui les relient, c'est-à-dire des lignes qui ont comme extrémité un point du premier élément et un point du deuxième.

Tu es un objet ponctuel : tu occupes un point du premier élément et tu veux passer sur le second. Comme tu n'aimes pas trop traverser des points inconnus, tu cherches de quel point du premier élément tu dois partir, quel chemin tu dois suivre et à quel point du deuxième élément tu dois arriver pour que cette inquiétante traversée de l'espace entre les deux éléments soit aussi courte que possible.

Lorsque tu cherches une **distance entre deux points**, tu n'as pas besoin de chercher quels sont les points de départ et d'arrivée des deux éléments : il n'y a qu'un point par élément !

Il ne te reste qu'une question : quel chemin suivre entre les deux ?
Et la réponse à cette question passe par un nouveau métaxiome :

M-11 Une unité de longueur étant choisie, soient A et B deux points et soit AB la longueur du segment qui les relie : la longueur de toute autre ligne reliant A et B est supérieure à AB.

Autrement dit, la plus courte des lignes qui relient deux points est le segment :
la distance entre deux points est donc la longueur du segment qui les relie.

Dans ce cas particulier, « longueur du segment » et « distance entre ses extrémités » ont la même signification - et c'est vraisemblablement de là que vient la confusion habituelle entre longueur et distance. Mais ce n'est vraiment qu'un cas particulier !

Dans les **cinq autres cas**, tu dois déterminer les points où le « saut » est le plus court entre les deux éléments (des points qui « se font face »), et mesurer le segment qui les relie.

Évidemment, si les deux éléments ont (au moins) un point en commun - s'ils sont « en contact », il est possible de passer de l'un à l'autre sans « sauter » : la distance entre ces deux éléments est zéro !
(C'est aussi la longueur du segment qui relie le point commun à lui-même.)

La recherche d'une distance entre deux éléments de base n'a donc d'intérêt que lorsque les éléments n'ont aucun point commun :
deux points distincts, une droite et un point extérieur à cette droite, un plan et un point extérieur à ce plan,
deux droites distinctes non coplanaires ou parallèles, un plan et une droite parallèle à ce plan sans en faire partie,
ou deux plans distincts parallèles.

Et voilà, la croisière est presque terminée. Encore un métaxiome, une définition… Et on rentre au port !

M-12 Soit un plan P et un point A de l'espace :
il existe un point de P, plus proche de A que tout autre point de P.

… Plus proche de A que tout autre … Donc ce point est unique !
En réalité, l'importance de M-12 réside davantage dans l'existence de ce point que dans son unicité, que j'aurais pu te démontrer plus tard en m'appuyant sur D-19 (juste en dessous) et sur les théorèmes T-36 et T-38 (encore loin, mais indépendants de M-12 !)

Et non, ce n'est PAS évident ☺

D-19 ***Distance*** **:** (***entre deux « éléments de base » : points, droites et plans)***
longueur de la plus courte des lignes qui les relient.

Je ne sais pas si tous les chemins mènent vraiment à Rome. En tout cas, la distance du centre de Paris au centre de Rome n'est pas d'environ 1350 km - comme l'indiquent certains guides routiers, mais d'environ 1270 km !
1350 km, c'est la longueur de la ligne qui suit la surface de la Terre… Mais cette ligne n'est pas la plus courte.
1270 km, c'est la longueur du tunnel rectiligne qui traverserait la Terre de Paris à Rome.

Après cette croisière épuisante, tu as bien mérité deux petites escapades rapides.

Première escapade **: du pouce au mètre, en passant par le pied.**

Non, Je n'ai pas l'intention de te retracer en détail l'histoire du mètre - même si je la trouve passionnante (personne n'est parfait) : comme pour les axiomes, jette un coup d'œil sur Wikipédia.

Tout ce que tu as lu, dans les pages précédentes, repose sur le choix d'un segment-unité.

La longueur d'une ligne dépend du segment-unité choisi : une ligne qui mesure 7 unités de longueur pour un certain segment-unité mesure 14 unités de longueur pour un segment-unité « deux fois plus petit ».
Donc, pour qu'une ligne « ait la même longueur » pour tous ceux qui s'y intéressent, il faut que tous se réfèrent au même segment-unité.
Et comme un segment est un endroit et que personne ne peut l'emporter avec lui, le plus simple est de définir un fil unité commun. Enfin... pas tout à fait, parce qu'un fil unité est un objet imaginaire, pas plus épais qu'un point !

Alors, au début, on s'est contenté d'objets courants dont on pouvait assez facilement marquer les extrémités - et on a imaginé un fil tendu qui aurait ces extrémités.

Quels objets courants ? Le seul « objet » qu'un être humain transporte toujours avec lui, c'est son corps.
Les premières unités de longueur se sont référées à des parties du corps humain : le pouce, le pied, la coudée (du coude aux doigts)...

Mais les corps humains n'ont pas tous les mêmes dimensions, et les scientifiques, avides de précision et de simplicité (il n'était pas vraiment simple de passer d'un pouce à un pied, d'un pied à une coudée), ont délaissé le corps humain pour... la Terre. En toute simplicité.

La Terre <u>et</u> le système décimal !

Ils sont tombés d'accord pour estimer qu'un fil-unité dont il faudrait 10 millions pour aller d'un pôle à l'Équateur, en suivant la surface de la Terre le plus directement possible, serait une unité convenable : une unité à taille humaine, ni trop grande, ni trop petite. Ils l'ont appelé le « mètre ». Ce mot vient du mot grec « metron », qui veut tout simplement dire « mesure ».
(À l'origine, le mètre n'était donc pas issu d'un « <u>segment</u>-unité » mais d'une « <u>ligne-courbe</u>-unité » : vu la forme de la Terre, il est difficile de prétendre que la partie de ligne qui correspondait au mètre était droite !)

Puis ils ont défini des unités 10,100, 1000 fois plus petites ou plus grandes. Pour les unités plus petites, ils ont précédé le mot « mètre » de préfixes construits à partir des mots 10,100 ou 1000 en latin - et pour les unités plus grandes ils ont utilisé des préfixes construits à partir des mêmes mots en grec :

$$\underbrace{\textbf{\textit{milli}}\text{mètre}\quad \textbf{\textit{centi}}\text{mètre}\quad \textbf{\textit{déci}}\text{mètre}}_{\textbf{\textit{latin}}}\quad \textbf{mètre}\quad \underbrace{\textbf{\textit{déca}}\text{mètre}\quad \textbf{\textit{hecto}}\text{mètre}\quad \textbf{\textit{kilo}}\text{mètre}}_{\textbf{\textit{grec}}}$$

Mais la science progresse, et avec elle le besoin de précision : ce que l'homme sait le mieux mesurer (c'est-à-dire avec le plus de précision), c'est la durée. Alors, maintenant, la mesure d'une ligne est associée à la mesure du temps : la longueur est associée à la durée. Période d'un pendule, propagation d'une onde, vitesse de la lumière, ont successivement été utilisées pour définir de plus en plus précisément le mètre....

Pourquoi « de plus en plus précisément » et non « parfaitement » ? L'unité de durée, la « seconde », est définie par rapport à une propriété d'éléments d'un atome particulier, donc d'éléments matériels : aussi précise soit-elle, elle s'appuie sur une mesure physique, donc imparfaite. Alors bien sûr, l'unité de longueur, le mètre, est également imparfaite !
Ce qui n'empêche pas d'en donner une définition :

D-20 ***<u>Mètre</u>*** : unité internationale de longueur.
En 2013 : distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458}$ seconde.

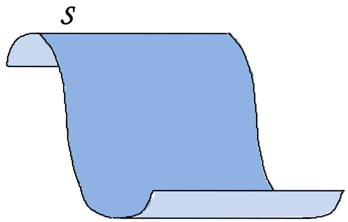
Le temps ne t'est pas apparu trop **<u>long</u>** ?

<u>Deuxième escapade</u> : de la longueur d'une ligne à l'aire d'une surface.

Tout comme la mesure d'une ligne est une longueur, la mesure d'une surface est une aire.

D-21 ***<u>Aire</u>*** : mesure d'une surface (comparaison de cette surface à une surface de référence).

Comme tu le sais, mesurer, c'est comparer. Mesurer une surface, c'est donc la comparer à une autre surface (une surface de référence) ! Bon, je ne vais pas tout recommencer : tu retrouves exactement le même principe que pour les lignes… C'est parti :



Tu veux mesurer l'aire de la surface $\mathcal{S}$:
tu veux donc comparer $\mathcal{S}$ à une autre surface !

Mais à quelle surface ?
Que pourrais-tu choisir comme surface de référence,
comme surface-unité ?

Une surface simple, qui te permette de répondre sans trop te compliquer l'existence à une question du genre « combien de fois cette surface de référence est-elle contenue dans $\mathcal{S}$? »

Ne cherche pas. (Je suis sûr que si tu commençais à chercher, tu imaginerais un tas de surfaces bizarres !)

Monsieur !!!

Ce n'est pas vrai ? Mais tu en aurais le droit, tu sais…
Seulement, ça ne te simplifierait pas vraiment le travail !

Ne cherche pas… Parce qu'il est un peu tard : les scientifiques du monde entier se sont mis d'accord pour élire un carré.

Pour certains mathématiciens, un carré est une ligne… pour d'autres - et dans ce livre - un carré est une surface. Et je sais bien que j'anticipe : je ne découvrirai vraiment les carrés que dans une centaine de pages, mais entre nous, tu sais bien un peu ce qu'est un carré ?

Attention, pas n'importe quel carré : un carré dont un côté mesure 1 unité de longueur !

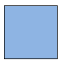
Pourquoi un carré ? Et pourquoi un côté qui mesure une unité de longueur ?
Je ne pourrais pas te répondre sans étudier les carrés, et là, c'est vraiment trop tôt.
J'y reviendrai, promis.

Aujourd'hui, nous allons nous contenter, toi et moi, d'un exemple !

Tu choisis une <u>unité de longueur</u> :

ce segment ⟶ ⊢——⊣ $\boxed{\text{ligne-unité}}$

Tu lui associes une <u>**unité d'aire**</u> :



ce carré ⟶ $\boxed{\textbf{surface-unité}}$ Je l'appelle ***c***.
(dont chaque côté
mesure 1 unité de longueur)

Comme une surface est un endroit, tu ne peux ni la déplacer, ni la courber.

Alors (comme pour les longueurs), tu réfléchis un peu, et tu inventes un nouvel objet (imaginaire) :

la « **feuille-unité** » : une feuille tellement mince qu'elle occupe exactement *c*, sans en déborder. Une feuille « de l'épaisseur d'un point ». Et bien sûr, une feuille très souple, que tu pourras déplacer et modeler pour lui permettre d'occuper une partie de $\mathcal{S}$.

Ce qui t'amène à formuler une nouvelle $\mathrm{D_{phy}}$… Et un nouveau $\mathrm{M_{phy}}$:

$\mathrm{D_{phy}}$-12 ***Feuille-unité*** : objet imaginaire souple qui, à sa création, occupe exactement le carré-unité.
(Mais tu peux ensuite le déplacer et comme il est souple, le modeler.)

$\mathrm{M_{phy}}$-4 Une feuille-unité déplacée ou modelée reste une feuille-unité.

$\mathrm{M_{phy}}$-4 te permet d'affirmer que le carré que tu as choisi comme surface-unité n'est qu'un carré-unité parmi des milliers (n'importe quel carré exactement occupé par une feuille-unité), ce qui te conduit à une nouvelle définition :

D-22 ***Unité d'aire*** **:** un carré que tu as choisi comme carré-unité
- ou n'importe lequel des autres carrés-unité qui lui sont associés.
(Chacun d'entre eux peut servir de carré de référence.)

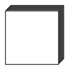
Ou **:** le nom qui a été donné à cet ensemble de carrés, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.
(Le mètre-carré, le pouce-carré…)

… Puis au choix de l'unité internationale d'aire :

D-23 ***Mètre-carré*** : unité internationale d'aire. L'aire d'un carré d'un mètre de côté.

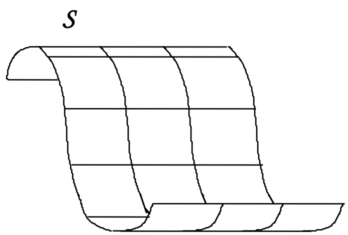
Voilà, maintenant, tu es équipé pour déterminer l'aire de $\mathcal{S}$:

Commence (toujours comme pour les longueurs), par imaginer tout un stock de feuilles-unité : tu en imagines une première, tu l'enlèves de *c*, tu en imagines une seconde, etc.

Tu disposes alors d'un carnet de feuilles-unité : 

Et tu vas t'en servir pour occuper des surfaces adjacentes de $\mathcal{S}$, jusqu'à ce que $\mathcal{S}$ soit totalement occupée.

J'anticipe encore : jette un coup d'œil à D-41 !



(Avec $\mathcal{S}$, ça semble facile, mais avec d'autres surfaces, il te faudrait peut-être découper des feuilles-unité en petits morceaux, et en remplir la surface comme si tu complétais un puzzle. ☺)

Ici, l'aire de $\mathcal{S}$ semble être d'environ 15 unités d'aire.

Une dernière D_{phy}, pour en terminer avec les aires ?

D_{phy}-13 ***<u>Aire d'une surface, en unité c</u>*** **:** le nombre de feuilles-unité du carré-unité c nécessaires pour occuper exactement cette surface.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)

Eh, Monsieur !
Comment ça, « pour en terminer » ?

Et M_{phy}-2, et M_{phy}-3 ? Et M-10 ??
Vous ne leur faites pas correspondre de métaxiomes, sur les surfaces ?

Décidément, rien ne t'échappe !
Non, je n'ai pas besoin de nouveaux métaxiomes :
Le carré-unité est défini à partir de la longueur de ses côtés,
et les métaxiomes sur les longueurs « déteignent » sur les aires.
(Ce n'est pas très mathématique ! Je devrais dire : je peux démontrer que les affirmations correspondantes restent vraies sur les aires, et je le ferai… Dans un autre livre ☺.)

<u>Dernière escapade</u> : de la longueur d'une ligne au volume d'un solide.

La mesure d'une ligne est une longueur, la mesure d'une surface est une aire…
Et la mesure d'un solide est un volume !

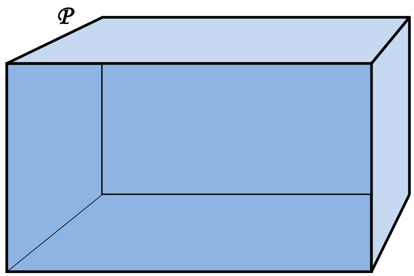
D-24 ***<u>Volume</u>*** : mesure d'un solide (comparaison de ce solide à un solide de référence).

Et mesurer, c'est toujours comparer : maintenant, un solide à un autre, bien sûr.

Alors, un exemple ?

Cette fois-ci, l'exemple sera un solide très simple, parce que sinon, les dessins deviennent effroyables !

Tu veux mesurer le volume du solide $\mathcal{P}$
(pour « **p**avé » : c'est le surnom habituel de ce type de solides)



Oui, je sais que j'anticipe encore... et bien plus que pour le carré, parce que c'est dans un autre livre que j'étudierai les pavés !

Mais, toujours entre nous, tu sais à quoi ressemble un pavé ?
(J'ai représenté une boîte qui entoure ce pavé :
une boîte dont l'intérieur serait plus foncé que l'extérieur.
Tu as bien compris que le pavé, c'est l'ensemble des <u>points</u> entourés par la boîte ?)

Oui, M'sieur, on sait :
Vos solides,
ce sont pas des vrais solides !

Je sens comme une sorte de moquerie, là…
En même temps, tu n'as pas vraiment tort ☺ !

Tu veux donc comparer $\mathcal{P}$ à un autre solide.

À quel solide ?
Que vas-tu choisir
comme solide-unité ?

Laissez-moi deviner, M'sieur ! Bon, un cube, c'est ça ?

Bien sûr ! Tu n'avais plus trop le choix, non, après l'escapade sur les aires ?
Et même… pas n'importe quel cube : un cube…

… Je sais : dont les côtés mesurent 1 cm !!!

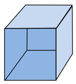
Oui… enfin, presque : un cube a des arêtes, pas des côtés…
Et ses arêtes mesurent une unité de longueur
- qui peut être une autre unité que le centimètre !!!
(Et non, tu n'étudieras pas les cubes, qui sont des pavés particuliers, dans ce livre !)

Comme pour le carré-unité :

Tu choisis une <u>unité de longueur</u> :

ce segment → |——| ligne - unité

Tu lui associes une **<u>unité de volume</u>** :

ce cube →  **cube - unité** Je l'appelle ***k***.
(dont chaque arête
mesure 1 unité de longueur)

Comme un solide est un endroit, tu ne peux ni le déplacer, ni le courber.
Alors (comme pour les longueurs et les aires), tu inventes un nouvel objet (imaginaire) :
le « **bloc-unité** » : un bloc qui occupe exactement *k*, sans en déborder. Et bien sûr, un bloc d'une matière souple (imagine une sorte de pâte à modeler), que tu pourras déplacer et modeler pour lui permettre d'occuper une partie de $\mathcal{P}$.

Ce qui t'amène à formuler une nouvelle D_{phy}… et un nouveau M_{phy} :

D_{phy}-14 ***<u>Bloc-unité</u>*** : matière imaginaire souple qui, à sa création, occupe exactement le cube-unité (mais tu peux ensuite le déplacer et le modeler).

M_{phy}-5 Un bloc-unité déplacé ou modelé reste un bloc-unité.

M_{phy}-5 te permet encore d'affirmer que le cube que tu as choisi comme solide-unité n'est qu'un cube-unité parmi des milliers (n'importe quel cube exactement occupé par un bloc-unité), ce qui te conduit à deux nouvelles définitions :

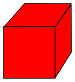
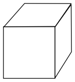
D-25 ***<u>Unité de volume</u>*** **:** un cube que tu as choisi comme cube-unité
- ou n'importe lequel des autres cube-unité qui lui sont associés.
(Chacun d'entre eux peut servir de cube de référence.)

Ou **:** le nom qui a été donné à cet ensemble de cubes, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.
(Le mètre-cube, le pouce-cube…)

D-26 ***<u>Mètre-cube</u>*** : unité internationale de volume. Le volume d'un cube d'un mètre d'arête.

Voilà, maintenant, tu es équipé pour déterminer le volume de $\mathcal{P}$ **:**

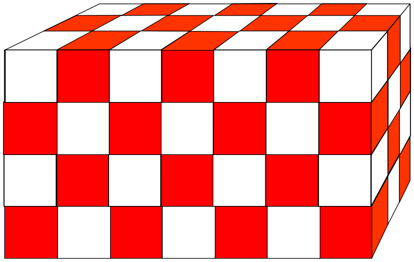
Commence (toujours comme pour les longueurs ou les aires), par imaginer un stock de blocs-unité.
Imagine-les de deux couleurs, ce sera plus clair :

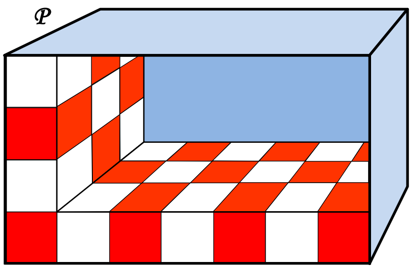
Des blocs rouges  … Et des blocs blancs 

Tu vas les utiliser pour occuper des parties <u>adjacentes</u> de $\mathcal{P}$,
jusqu'à ce que $\mathcal{P}$ soit totalement occupé.

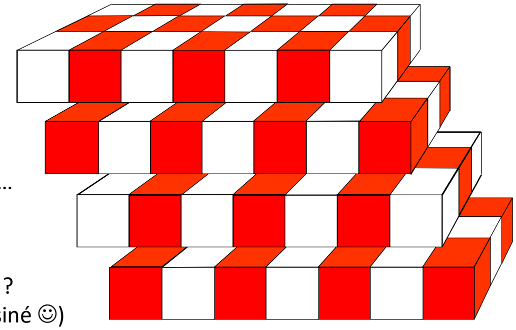
(Avec des solides plus compliqués que $\mathcal{P}$, il te faudrait
peut-être découper des blocs-unité en petits morceaux,
et t'en servir pour boucher des trous. ☺)

Ici, le volume de $\mathcal{P}$ semble être
d'environ 84 unités de volume :





7 tranches de 12 cubes…



Ou 4 couches de 21 cubes…

… et pourquoi pas
3 tranches de 28 cubes ?
(Non, je ne l'ai pas dessiné ☺)

Une toute dernière D_{phy} ?

D_{phy}-15 ***<u>Volume d'un solide, en unité k</u>*** **:** le nombre de blocs-unité du cube-unité k nécessaires pour occuper exactement ce solide.
(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)

Et comme pour les aires, je n'aurai pas besoin de métaxiomes supplémentaires.

J'avais deviné, M'sieur…
sauf que là, je pourrai pas voir les démonstrations des théorèmes,
parce qu'elles seront dans un autre livre, c'est ça ?

Voilà !
Désolé, mais je n'arriverai pas à tout faire tenir en un seul livre.
Une question de … volume ☺ !

Sixième voyage

en douze excursions

Equidistants ***Sphère*** ***centre*** ***rayon*** ***Boule*** ***convexe***

Cercle ***calotte sphérique*** ***hémisphère*** ***Disque*** ***Arc de cercle*** ***Secteur circulaire***

Douze excursions apéritives avant le dernier voyage :

Ces excursions « tournent » (*) autour de la notion d'équidistance et t'apportent de nouvelles définitions.
Ensuite, tu pourras - enfin - embarquer pour le 7ème et dernier voyage !

(*) oui, c'est un jeu de mots !

D-27 ***Equidistants*** **:** les points A, B, C, etc. sont *équidistants* du point M.

C'est la façon mathématique de dire que A, B, C, etc. sont tous à la même distance de M :
c'est un mot construit à partir du latin, mais à l'origine, *aequidistans* signifiait « parallèle » - avec l'idée que deux droites parallèles « gardaient leurs distances ». On l'utilise encore dans ce sens-là, lorsqu'on parle de lignes équidistantes ou de surfaces équidistantes... mais je me contenterai de l'utiliser à propos de distances par rapport à un point.

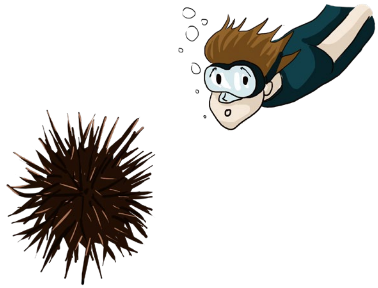
Comme la distance entre deux points est également la longueur du segment qui les relie,
A, B, C, etc. sont *équidistants* de M peut se traduire par : MA = MB = MC = ...

Et maintenant, une devinette-piège :

voici un point A :
Comment appelles-tu
l'ensemble de tous les points
qui sont à exactement 2 cm de A ?

Avoue que tu as pensé : *facile, c'est un cercle !* ???

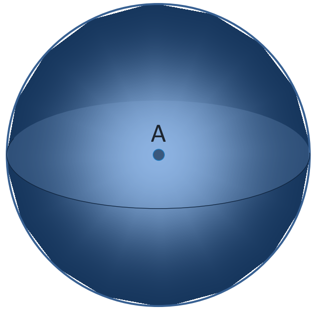
Alors, euh... tu as déjà vu un oursin ?
Et un oursin te fait penser à un cercle ?
Pourtant, les extrémités de ses épines sont toutes (approximativement) à la même distance d'un point qui serait « au cœur » de l'oursin.
(... s'il en avait un ! Un oursin n'a pas de cœur. ☺)



Donc, tu réfléchis un peu plus, et tu réponds :

Une sphère, monsieur ! Comme la Terre !

Gagné !
Tu vois que c'est utile, de réfléchir...
Mais, comme la <u>surface</u> de la Terre...
Une sphère est une surface :
la Terre est un solide - limitée par cette surface !



D-28 ***<u>Sphère</u>*** **:** ensemble des points équidistants d'un point donné.

Et maintenant, deux excursions ultrarapides :

D-29 ***<u>Centre (d'une sphère)</u>*** **:** le point - unique ! - équidistant des points de la sphère.

Un centre, en géométrie, c'est toujours un point phare, remarquable : un... centre d'intérêt ! L'intérêt, ici, c'est que la sphère est construite autour de ce point. Mais attention : le centre d'une sphère n'est pas un point de la sphère : dans l'exemple que je t'ai donné, A n'est pas à 2 cm de A ! Le seul cas où le centre d'une sphère est un point de cette sphère est le cas où la distance entre le centre et les points de la sphère est nulle... ce qui me permet d'introduire une définition :

D-30 ***<u>Rayon (d'une sphère)</u>*** **:** un mot ambigu - il en existe quelques-uns, en mathématiques. ☺

[AB] ***<u>est</u>*** *un rayon* d'une sphère de centre A signifie : B un point de la sphère.

Ici, « rayon » a le sens de : <u>segment</u> qui relie un point de la sphère au centre de cette sphère.
Imagine n'importe laquelle des épines de l'oursin...

Ou **:** cette sphère ***<u>a</u>*** *un rayon* de 2 cm
ou
<u>le</u> *rayon* de cette sphère est de 2 cm

signifie : les points de la sphère sont à 2 cm de son centre.

... mais là, « rayon » a le sens de : <u>distance</u> entre un point de la sphère et son centre.
(Maintenant, tu peux imaginer la longueur de chaque épine !)

Autrement dit, le sens du mot « rayon » dépend du contexte !

Toutefois, les mots « centre » et « rayon » ne sont pas réservés aux sphères : tu m'as parlé de la Terre, tout à l'heure, la Terre qui n'est pas une sphère, mais un solide !

Allez, encore huit petites excursions (sans compter 2 « *bis* », 2 « *ter* »... et même 2 « *quater* » ☺) :

D-32 ***Boule*** **:** ensemble des points de l'espace dont la distance à un point donné est inférieure ou égale à une valeur donnée. (D-32, pas D-31... et non, ce n'est pas une erreur : attends quelques lignes ?)

Ou **:** solide limité par une sphère - et contenant son centre !

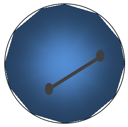
Ou encore **:** solide convexe limité par une sphère.

(Trois façons de dire : tous les points à l'intérieur d'une sphère, et la sphère elle-même !)

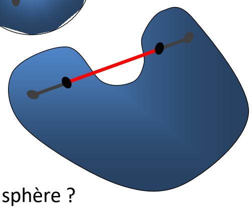
Eh, oh, Monsieur, vous allez trop vite !
Qu'est-ce que ça veut dire, « convexe » ?

Oh, pardon, ça m'a échappé ! C'est un petit peu « hors programme »...
Mais ça ne fait rien, je suis sûr que tu vas comprendre :
un solide convexe, c'est un solide tel que si deux points appartiennent à ce solide, tous les points du segment qui les relie lui appartiennent aussi ! Ou si tu préfères, un objet ponctuel qui relie deux points quelconques de ce solide en suivant un segment ne peut pas sortir du solide... ou encore : un solide qui n'a pas de creux, pas de trou (mais les mots « creux » et « trou » ne sont pas vraiment des mots du vocabulaire mathématique).

Imagine deux points au hasard d'une boule et le segment qui les relie.
Tu « vois bien » qu'aucun point de ce segment ne sort de la boule !

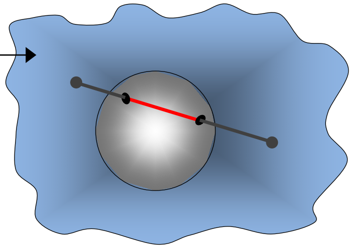


Alors qu'avec un autre solide, qui ressemblerait par exemple à ceci,
il est tout à fait possible de mettre en évidence un segment
dont les extrémités sont des points du solide mais dont certains points n'appartiennent pas à ce solide.
Un solide de ce genre n'est pas convexe !



En gris, les points du segment qui appartiennent à l'ensemble observé. En rouge, ceux qui « sortent » de cet ensemble.

Pourquoi ai-je précisé qu'une boule doit être un solide <u>convexe</u> limité par une sphère ?
Parce qu'une sphère sépare l'espace en deux solides :
une boule et... <u>le solide formé de tout le reste de l'espace</u> !



Mais ce deuxième solide n'est pas convexe :
tu peux facilement imaginer un segment
dont les points appartiennent à ce solide,
mais qui traverse la boule - donc il sort de ce solide !

Voilà pourquoi je peux définir une boule comme
celui des deux solides limités par une sphère et qui est convexe !

D-31 ***Ensemble convexe (de points)*** **:** ensemble de points tel que tout segment qui relie deux de ses points soit entièrement contenu dans l'ensemble.

(la voilà, ta D-31 ☺)

Et n'oublions pas les deux « *bis* » promis :

D-29 *bis* ***Centre** **d'une boule*** **:** le centre de la sphère qui la limite.

D-30 *bis* ***Rayon** **d'une boule*** **:** le rayon (dans les 2 sens du mot) de la sphère qui la limite.

Mais, Monsieur, un cercle aussi, ça a un centre et un rayon, non ? Vous les définissez comment, les cercles ?

Pas compliqué... réfléchis un peu :
un cercle c'est... c'est...
allons, un effort...
c'est ?

Plat, monsieur !

Hé oui, plat. Et c'est parti pour une nouvelle définition :

D-33 ***<u>Cercle</u>*** **:** ensemble des points d'un plan équidistants d'un point donné de ce plan.

Et bien sûr, les deux « *ter* » :

D-29 *ter* ***<u>Centre d'un cercle</u>*** **:** le point du plan de ce cercle qui est équidistant des points du cercle.

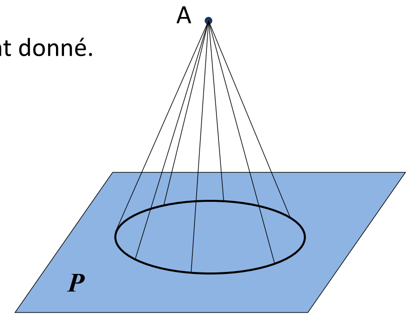
D-30 *ter* ***<u>Rayon d'un cercle</u>*** **:** <u>segment</u> qui relie un point du cercle au centre de ce cercle.
Ou **:**
<u>distance</u> entre un point du cercle et son centre.

Avant de poursuivre les excursions, je voudrais que tu prennes le temps de savourer celle-ci. Tu n'es pas pressé, n'est-ce pas ? Et le cercle, c'est tellement important, au collège !

Alors, une première observation : pour définir un cercle, j'ai choisi - comme tout le monde - de privilégier un point de son plan (que je définis ensuite comme le « centre » du cercle). Mais une définition parfaite ne doit pas contenir de conditions inutiles alors, si j'avais voulu être parfait j'aurais défini un cercle comme :

ensemble des points d'un plan équidistants d'un point donné.

En effet, même avec un point qui n'est pas dans le plan choisi,
l'ensemble obtenu est un cercle...
Je le démontrerai plus tard - désolé, tu vas devoir attendre.
Mais je te le démontrerai, c'est promis !



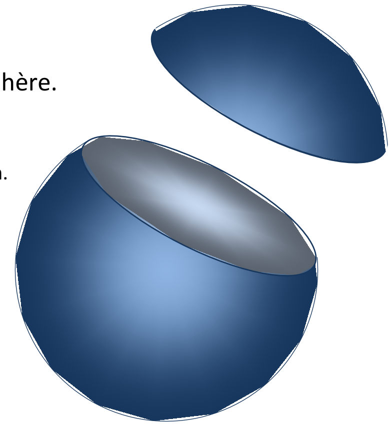
Les points du trait épais sont équidistants de A :
les segments que j'ai tracés ont tous la même longueur.
Le trait épais est un cercle, mais A n'est pas son centre !

Quand tu mesures les segments, sur le dessin, ils n'ont pas la même longueur... et le trait épais ne ressemble vraiment pas un cercle. C'est parce que le dessin est plat alors que je cherche à représenter quelque chose qui ne l'est pas. Dessine un cercle sur une feuille de papier posée sur une table, puis éloigne-toi de la table et regarde : ton cercle ressemblera à ce que j'ai dessiné. ☺

Et maintenant, une deuxième observation (qui est en fait liée à la première) :

si un plan traverse une sphère, l'ensemble des points communs au plan et à la sphère est un cercle - et je te laisserai le démontrer (c'est une conséquence de la démonstration-en-attente).

Ce plan sépare alors la sphère en deux surfaces limitées par ce cercle, et ces surfaces ont un nom :



D-34 ***<u>Calotte sphérique</u> :*** ensemble des points d'une sphère situés d'un même côté d'un plan qui traverse cette sphère.

« d'un même côté » est ici une extension de D-2 :
deux points sont d'un même côté d'un plan
si tu peux les relier par une ligne qui ne traverse pas le plan.

D-35 ***<u>Hémisphère</u> :*** calotte sphérique déterminée par un plan qui traverse une sphère en passant par son centre.

Autrement dit, un hémisphère est une « demie-sphère »
… exprimé en grec ! Et avec un piège : « sphère » est féminin,
mais « hémisphère » est masculin. Le français est parfois bizarre !

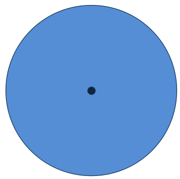
C'est bientôt la fin des excursions : encore trois petits tours, et tu embarqueras pour la dernière croisière.

Tu as vu qu'une sphère - qui est une surface - est la limite d'un solide.
De la même façon, un cercle - qui est une ligne - est la limite d'une surface. Et devine comment les mathématiciens ont appelé cette surface ? Un disque, tout simplement :

D-36 ***<u>Disque</u>*** **:** ensemble des points d'un plan dont la distance à un point donné de ce plan est inférieure ou égale à une valeur donnée.

Ou **:** surface plane limitée par un cercle - et contenant son centre !

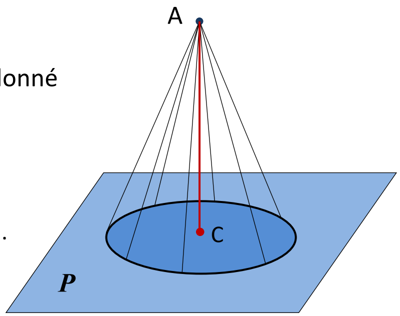
Ou encore **:** surface plane convexe limitée par un cercle.



Comme pour le cercle, je voudrais prendre le temps de deux observations :

pour définir un disque, j'ai à nouveau choisi - toujours comme tout le monde - de privilégier un point de son plan. Mais il m'aurait à nouveau suffi d'écrire :

ensemble des points d'un plan dont la distance à un point donné est inférieure ou égale à une valeur donnée.



Si la distance de A au centre C du cercle est de 4 cm et si les segments que j'ai tracés mesurent 6 cm, le disque bleu foncé est bien l'ensemble des points du plan P dont la distance à A est inférieure ou égale à 6 cm.

(mais bien sûr, en dessous de 4 cm, tu ne trouveras plus de points acceptables.)

Et une deuxième observation (à laquelle tu devrais maintenant t'attendre) :
si un plan traverse une boule, l'ensemble des points communs au plan et à la boule est un disque
(mais les deux parties de la boule séparées par ce plan n'ont pas de nom particulier).

Et j'ai failli oublier les « *quater* » :

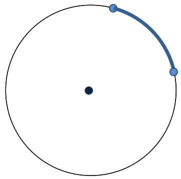
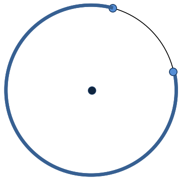
D-29 *quater* ***<u>Centre d'un disque</u>*** **:** le centre du cercle qui le limite.

D-30 *quater* ***<u>Rayon d'un disque</u>*** **:** le rayon (dans les 2 sens du mot) du cercle qui le limite.

Allez, les deux derniers petits tours, et puis repos :

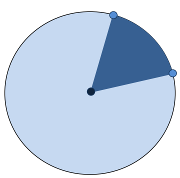
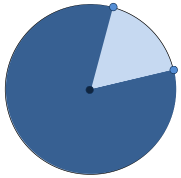
D-37 ***<u>Arc de cercle</u>*** **:** ensemble des points d'un cercle situés entre deux points de ce cercle.

- Donc, fais bien attention : deux points d'un cercle définissent <u>deux</u> arcs !

Un arc est une ligne :  **ou** 

D-38 ***<u>Secteur circulaire</u>*** **:** ensemble des points d'un disque limité par deux rayons de ce disque.
(et bien sûr également par un arc de cercle.)

- Fais encore attention : deux rayons d'un disque définissent <u>deux</u> secteurs !

Un secteur est une surface :  **ou** 

Et maintenant, un peu de repos... avant le grand voyage !

Septième voyage

en 2 croisières, 5 escales et une excursion

Frontière ***Périmètre*** ***Adjacents*** ***Angle*** ***Côtés*** ***Sommet*** ***Angles particuliers***

Feuille angulaire ***Écart angulaire*** ***Bissectrice d'un angle*** ***Angle droit*** ***Degré*** ***Grade*** ***Radian***

Polygone convexe ***Triangle : côtés, sommets, angles*** ***Figures isométriques*** ***Triangles isométriques***

Première croisière : les angles.

Première escale : les **frontières** de la géométrie.

En géographie politique, une frontière est une ligne qui entoure un État : les habitants de cet État doivent la traverser pour aller à l'étranger. Comme nous vivons à la surface de la Terre, ces frontières sont des lignes qui séparent des surfaces.

En géométrie, nous n'observons pas seulement des surfaces. Alors, nous avons trois types de frontières :

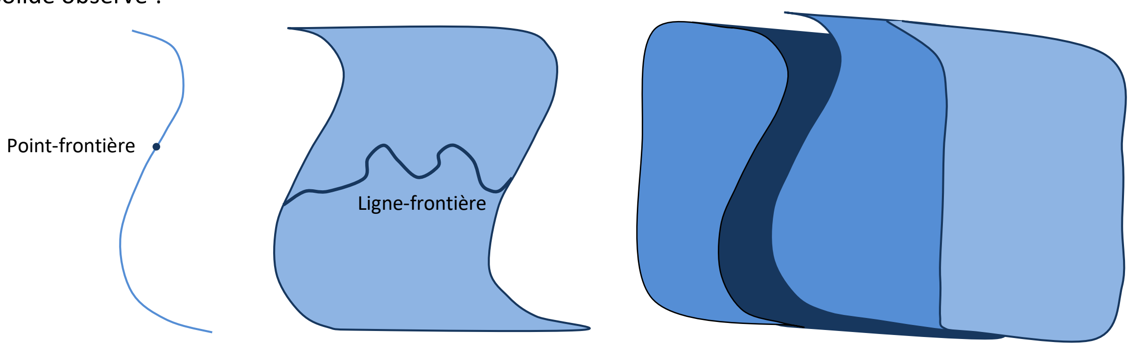
un point peut être une frontière entre deux parties d'une ligne,

une ligne peut être une frontière entre deux parties d'une surface,

une surface peut être une frontière entre deux parties d'un solide.

lorsqu'un point, une ligne ou une surface est une frontière, il est impossible à un objet ponctuel de relier un point d'une des deux parties séparées à un point de l'autre partie, sans traverser cette frontière.

Impossible… Sans « tricher », c'est-à-dire en ne passant que par des points de la ligne, de la surface ou du solide observé !



Surface-frontière :
j'ai séparé les deux morceaux du solide pour que tu puisses voir la frontière... mais naturellement, tu dois imaginer que les deux blocs sont collés !

Je suppose que tu attends quelques définitions ?

D-39 ***<u>Frontière</u>*…**

<u>d'une ligne</u> : **point** qui sépare la ligne en deux lignes qui n'ont aucun autre point commun.

<u>d'une surface</u> : **ligne** qui sépare la surface en deux surfaces qui n'ont aucun autre point commun.

<u>d'un solide</u> : **surface** qui sépare le solide en deux solides qui n'ont aucun autre point commun.

L'extrémité d'une ligne, l'enveloppe d'une surface ou d'un solide sont également des frontières - entre la ligne, la surface ou le solide et... une extension quelconque de cette ligne, de cette surface ou de ce solide !

Une frontière peut être limitée... ou illimitée. Par exemple, une droite d'un plan sépare ce plan en deux demi-plans, dont elle est la frontière.

D-40 ***<u>Périmètre (d'une surface limitée)</u>*** **:** longueur de la ligne qui limite cette surface (sa frontière).

« Périmètre » vient du grec et tu pourrais le traduire par « mesure autour », ou « mesure du contour ».

D-41 ***<u>Adjacent(e)s</u>*.**

<u>Lignes adjacentes</u> : deux lignes qui ont la même frontière et aucun autre point commun.

<u>Surfaces adjacentes</u> : deux surfaces qui ont en commun une ligne qui fait partie de leurs frontières, et aucun autre point commun.

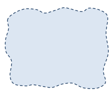
<u>Solides adjacents</u> **:** deux solides qui ont en commun une surface qui fait partie de leurs frontières, et aucun autre point commun.

<u>Deuxième escale</u> **:** ce qu'est un angle.

Il nous manque encore un élément avant de pouvoir « faire » de la géométrie - c'est-à-dire construire et observer des figures, réfléchir à leurs propriétés, imaginer.

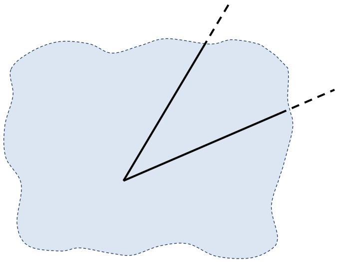
Cet élément, évidemment, c'est l'angle. Pour le définir, je vais partir du plan. Un plan, tu connais. C'est... immense ! La surface de cette page est une toute petite partie d'un plan. Non, rectification : si cette page était absolument, parfaitement, totalement plate, sa surface serait une toute petite partie d'un plan !

Et la surface de cette tache d'encre, là, en serait une encore plus petite partie.



Comme je ne peux évidemment pas te montrer un plan entier, je pourrais, au mieux, me limiter à cette page (que tu devrais donc garder bien plate ☺). Mais comme je ne veux pas non plus avoir à colorier toute la page, je vais me contenter d'une tache d'encre. À toi de l'imaginer illimitée !

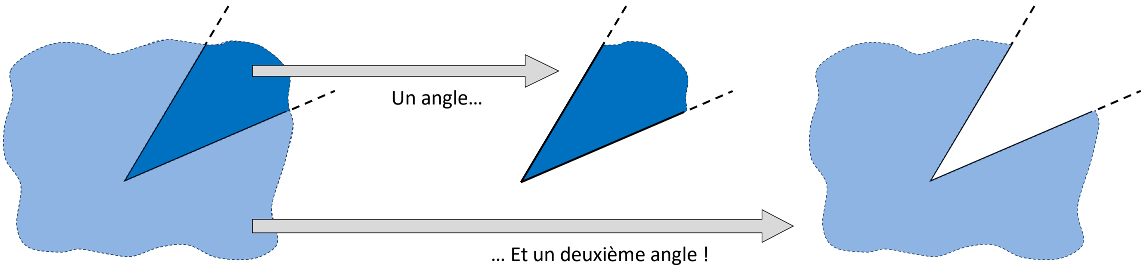
Donc, voici un plan :



et deux demi-droites de ce plan,
de même origine
(n'oublie pas de les imaginer illimitées).

ces deux demi-droites (adjacentes) forment, à elles deux, une ligne illimitée (en forme de « V ») et cette ligne est une frontière entre deux parties du plan : elle sépare le plan en deux surfaces adjacentes illimitées - même si ces surfaces sont « arrêtées » par les deux demi-droites.

Ce sont ces surfaces ce que nous appelons des angles :



Tu as bien sûr tout de suite remarqué que le premier angle (en bleu foncé) est une surface convexe... mais pas le deuxième ?

Oh ben oui, m'sieur !
Tout de suite !

Tu es prêt pour quelques définitions ?

D-42 ***<u>Angle</u>*** **:** surface plane limitée par deux demi-droites de même origine.

N'oublie pas que ces deux demi-droites définissent <u>deux</u> angles (adjacents) !

Te rappelles-tu **M-3** : *il passe exactement un plan par deux droites sécantes* ?
Tu peux facilement en déduire que :
il passe exactement un plan par deux demi-droites non-alignées, de même origine.

Un angle est une partie immense d'un plan, partiellement limitée (par deux demi-droites)...
mais partiellement seulement, puisque le plan et les deux demi-droites sont illimités !

D-43 ***<u>Côté d'un angle</u>*** **:** chacune des deux demi-droites qui le limitent.

D-44 ***<u>Sommet d'un angle</u>*** **:** l'origine commune à ses deux côtés.

D-45 ***<u>Angles adjacents</u>*** **:** deux angles coplanaires qui ont exactement un côté en commun.
(Donc le même sommet : ce sont des surfaces adjacentes particulières !)

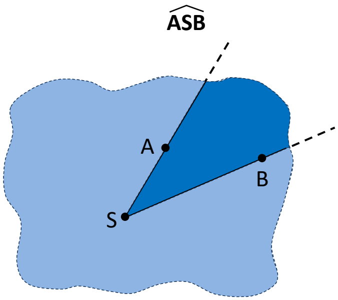
Il est possible que ton prof. te définisse un angle comme la <u>ligne</u> formée par les deux demi-droites adjacentes. Je l'ai fait pendant très longtemps. Alors, un angle est-il une ligne ou une surface ? C'est une grave question (bien que limitée au collège et au lycée parce qu'après, un angle est défini très différemment !)... pour des raisons de structure de ce livre, je préfère considérer ici un angle comme une surface, mais en pratique, les deux visions - qui ont toutes deux des avantages et des inconvénients - sont raisonnables. Et la différence (apparente) principale entre les deux porte sur le vocabulaire : si l'angle est défini comme une ligne, ce que j'appelle sa frontière devient l'angle lui-même et ce que j'appelle l'angle devient un « secteur angulaire ». Avec une conséquence importante tout de même : dans ce cas-là, deux demi-droites de même origine ne définissent plus qu'un seul angle !

<u>Quelques façons de nommer un angle</u> :

tu peux te contenter de l'appeler $\mathcal{A}$, par exemple. Mais habituellement, au collège, tu utilises une notation bien connue : tu écris côte à côte trois lettres et tu surmontes le tout d'un « chapeau ». Quelles lettres ?

En général, les noms d'un point d'un des côtés, du sommet, d'un point de l'autre côté. (<u>Le nom du sommet toujours entre les deux autres noms</u>)

par exemple :

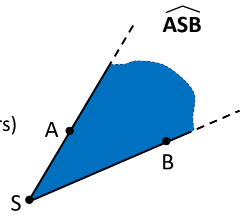


Mais... incertitude :
quel angle représente $\widehat{\mathbf{ASB}}$?
Le bleu clair ou le bleu foncé ?

Réponse : c'est une vraie difficulté !

Heureusement, les angles que tu auras à observer au collège sont (presque toujours) des angles convexes...

alors, je vais décider que $\widehat{\mathbf{ASB}}$ est l'angle convexe !



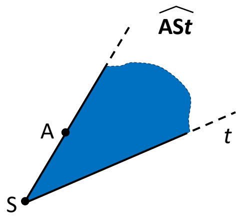
Eh, monsieur, ce n'est pas juste, c'est du favoritisme !

Et l'autre angle alors ?

Tu as raison, ce n'est pas juste. Mais c'est pratique. Désolé.
certains mathématiciens utilisent le chapeau à l'envers - la pointe vers le bas - pour les angles qui ne sont pas convexes (on les appelle des angles concaves)... mais ce n'est pas une notation internationale.
Évidemment, je n'aurais pas eu cette difficulté si j'avais défini un angle comme une ligne... j'en aurais eu d'autres !

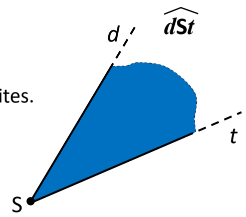
Au lieu de nommer un point d'un des côtés, tu peux, si tu le préfères, nommer directement le côté lui-même (la demi-droite).

Par exemple :



ou même :

J'ai appelé t et d les deux demi-droites.



Encore deux remarques rapides, trois angles particuliers, et, enfin, la dernière escale !

Premièrement, si je nomme l'angle à partir de deux demi-droites, je n'ai plus besoin de nommer le sommet !
Je pourrais donc simplement écrire : $\widehat{d\,t}$ … Mais « ça ne se fait pas » ☺

Deuxièmement, au collège, $\widehat{\mathbf{ASB}}$ et $\widehat{\mathbf{BSA}}$ représentent le même angle.
Tu verras plus tard - au lycée - qu'il existe une écriture qui correspond à $\widehat{d\,t}$ et dans laquelle l'ordre des lettres a de l'importance :
l'angle défini par (d,t) n'est pas le même que l'angle défini par (t,d)… mais ça, ce n'est pas pour maintenant ! (Sur mon dessin, (d,t) serait l'angle concave et (t,d) l'angle convexe.)

<u>Trois angles particuliers</u> :

Les mathématiciens ont une habitude détestable… tant qu'on ne s'y est pas habitué : lorsqu'ils disent « deux droites », ou « deux demi-droites » (ou « deux machins »…), ils n'excluent pas du tout qu'il puisse s'agir de deux fois la même droite, ou deux fois la même demi-droite (ou deux fois le même machin…).
Même si je ne suis qu'un tout petit mathématicien, je fais comme eux. Ce qui veut dire que D-42 s'applique également à « deux fois la même demi-droite », d'où l'entrée en scène de deux angles adjacents pas comme les autres : l'**angle nul** et l'**angle plein**.

« Deux fois la même demi-droite » ne définit pas un plan unique (tu peux imaginer de nombreux plans qui contiennent une même demi-droite : ils semblent pivoter autour d'elle).

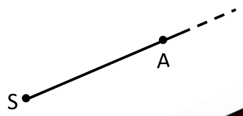
Alors, je dois préciser : une demi-droite donnée (considérée comme deux fois la même demi-droite) sépare <u>chacun des plans</u> qui la contiennent en deux angles adjacents :

un « **angle nul** » :

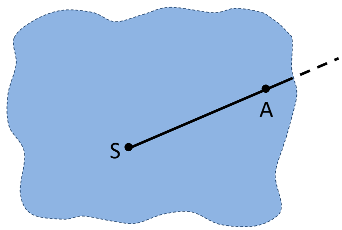
les points
de cette demi-droite

un « **angle plein** » :

les points de cette demi-droite…
et tous les autres points du plan.



Imagine un éventail fermé… ou complètement déployé

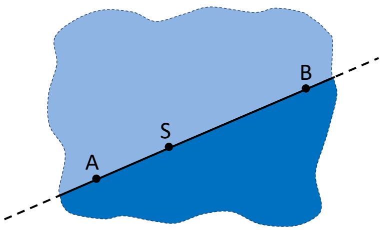


Et une petite devinette : que représente $\widehat{\mathbf{ASA}}$?

Dans cette situation particulière, les deux angles sont convexes, alors ?
Alors, il n'y a pas de convention internationale ! Mais comme tu peux facilement imaginer l'angle nul comme le plus « petit » des angles convexes - alors que l'angle plein serait le plus « grand » des angles concaves, $\widehat{ASA}$ représente souvent l'angle nul.

Pourquoi **trois** angles particuliers ?

Parce qu'il y a encore un cas où deux demi-droites de même extrémité ne définissent pas un plan unique : celui où ces demi-droites, à elles deux, forment une droite.



… Ou un éventail à moitié ouvert !

Et là encore, je dois préciser : lorsqu'une droite est considérée comme deux demi-droites adjacentes, ces deux demi-droites séparent chacun des plans qui la contiennent en deux angles adjacents - tous les deux convexes - appelés « **angles plats** ».

Mais $\widehat{ASB}$, c'est lequel ?

Bizarre, bizarre... je SAVAIS que tu me poserais cette question.

Tu as gagné, tu me coinces : je n'en sais rien ! C'est encore une de ces écritures ambiguës qui n'existent que pour te montrer l'imperfection des mathématiciens ☺

Voilà pour les 3 premiers angles particuliers !

Premiers ??? … Il y en a d'autres ?

Un seul … mais très important !
Rendez-vous après la prochaine escale ?

Troisième escale : l'**écart angulaire**, ou la **mesure d'un angle.**

Une escale qui commence par une définition :

D-46 ***Écart angulaire*** : mesure d'un angle (comparaison de cet angle à un angle de référence).

Car bien sûr, tu te rappelles que mesurer, c'est...

Comparer, M'sieur !

Tu vois que tu suis ! Mesurer un angle, c'est le comparer à un autre angle.

Quel autre angle ? En théorie, n'importe quel angle - que tu considères comme un angle de référence - peut faire l'affaire. Il te suffit de le nommer « **angle-unité** ». En pratique... j'y reviendrai dans quelques lignes !

Comment le comparer à cet angle-unité ? Revois le voyage sur les longueurs. L'idée serait de te poser une question du genre : combien d'angles-unité sont-ils contenus dans l'angle que je veux mesurer ? Mais, bien sûr :

d'une part un angle ne bouge pas. C'est une surface donc un ensemble de points, donc un endroit.
D'autre part, même s'il bougeait, peux-tu affirmer que le faire pivoter ne le changerait pas ?

La parade, tu la connais déjà : c'est de créer un « objet » (imaginaire) qui peut occuper ton angle-unité. Un objet, c'est mobile !

Quel objet ?

Un angle est une surface, il nous faut donc un objet qui occupe une surface. Une sorte de feuille de papier... mais pas plus épaisse qu'un point !

Mais un angle est illimité. Je vais devoir imaginer un objet illimité ?

Non, pas du tout : une fois que la « forme » de l'angle est déterminée, tu peux arrêter l'objet où tu le veux.

Alors, comme objet, je te propose une feuille « hyper-fine » (un point d'épaisseur !) qui occupe un secteur circulaire - donc limitée par les deux côtés de l'angle et par un arc de cercle : un cercle dont le centre est le sommet de l'angle.

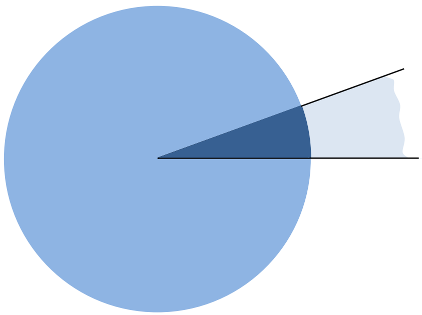
Et le rayon ? Pour l'instant, disons 2 cm. Après, on verra bien…

Donc, voici une nouvelle « définition-physique » :

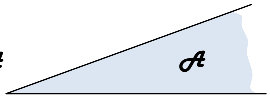
D_{phy}-16 ***<u>Feuille-angulaire-unité</u>*** :

objet (imaginaire) qui occupe exactement
les points communs à un angle-unité
et à un disque
du même plan que l'angle-unité,
dont le centre est le sommet de cet angle,
et dont tu as choisi le rayon.

(Tu peux déplacer cet objet.)

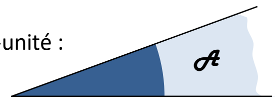


Ton angle-unité, $\mathcal{A}$



… et une feuille-angulaire-unité

… qui vient se loger dans l'angle-unité :



Comme pour les longueurs, mesurer un angle se ramène maintenant à répondre à la question : combien de feuilles-angulaires-unité, placées « côte à côte » sont-elles nécessaires pour occuper le secteur circulaire de 2 cm de rayon limité par cet angle ? Ce qui suppose que toutes ces feuilles-angulaires-unité, quelles que soient leurs positions, représentent bien ton angle unité. Et, tu l’as deviné, un nouveau « métaxiome-physique » :

M$_{phy}$-6 Quelle que soit sa position, une feuille-angulaire-unité reste une feuille-angulaire-unité.

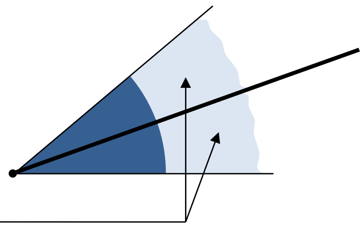
Et comme pour les segments-unité, ça signifie que ton angle-unité n'est pas du tout unique :

pour n'importe quel point de l'espace,

si je choisis un plan qui passe par ce point,
si je choisis une demi-droite de ce plan, limitée par ce point,

et si, de part et d'autre de cette demi-droite,
je place côte à côte (toujours dans le même plan)
deux feuilles-angulaires-unité dont le sommet est le point choisi...

... alors je définis deux nouveaux angles-unité.

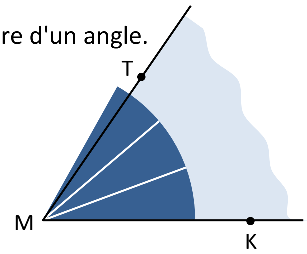


Comme je peux changer à volonté de point, de plan et de demi-droite,
j'ai la possibilité de faire apparaître des milliards d'angles-unité.

Voilà. Maintenant, tu commences à avoir les éléments nécessaires à la mesure d'un angle.

Si, par exemple, tu veux mesurer l'angle $\widehat{TMK}$,
cela revient à te poser la question :

Combien de feuilles-angulaires-unité de sommet M sont-elles nécessaires pour occuper exactement un secteur circulaire limité par $\widehat{TMK}$?



Répondre à cette question, c'est déterminer l’écart angulaire de $\widehat{TMK}$, **dans l'unité $\mathcal{A}$**.

D-47 ***<u>Unité d’écart angulaire</u>*** : un angle que tu as choisi comme angle-unité - ou n'importe lequel des autres angles-unité qui lui sont associés.
(Chacun d'entre eux peut servir d’angle de référence.)

Ou **:** le nom qui a été donné à cet ensemble d’angles, lorsqu'il a été accepté par suffisamment de personnes pour mériter un nom.
(Par exemple : le degré, le grade, le radian, … patience.)

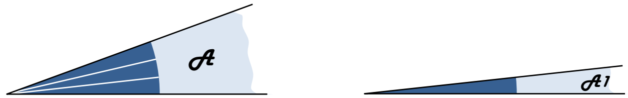
Naturellement, et c’est le cas pour $\widehat{TMK}$, il se peut que l'angle à mesurer soit « entre deux » nombres entiers de feuilles-angulaires-unité. Je dois donc pouvoir les subdiviser (oui, comme pour les longueurs).

Ce qui m’amène à te proposer un « métaxiome-physique » :

Mphy-7 Une unité d'écart angulaire et un nombre entier n, supérieur à 1, étant choisis,
il existe toujours une autre unité d'écart angulaire, et une seule,
dont n feuilles-angulaires-unité occupent exactement un angle-unité de l'unité initiale.

Traduction libre : à partir d'une unité d'écart angulaire, tu peux toujours créer une nouvelle unité, n fois plus petite que la première.

Par exemple, si $\mathcal{A}$ est l'angle-unité initial, et si n est égal à 3,
les angles-unité de la nouvelle unité d'écart-angulaire ressembleront à $\mathcal{A}_1$:



Et je peux recommencer avec la nouvelle unité ?
Pour en obtenir une encore plus petite ?
Et ça ne s'arrête jamais,
comme pour les longueurs ?

Jamais, tu as bien compris ☺
Et comme pour les longueurs, il se peut qu'aucune de tes unités de plus en plus petites ne te permette d'atteindre exactement la frontière de l'angle que tu cherches à mesurer, sans en déborder.

Pffiou…
qu'est-ce que c'est bizarre.
s il y avait encore un autre métaxiome,
pour les longueurs …
vous savez bien,
le truc
? toujours pouvoir dépasse un point !

Bien vu ! Seulement je pouvais toujours imaginer une ligne qui « allait encore plus loin »,
alors qu'un angle ne peut pas dépasser l'angle plein
- en tout cas pas avec notre définition d'un angle.
Pour mesurer l'angle plein, je dois recouvrir un disque entièrement, et même si chacune de mes feuilles-angulaires-unité n'occupe qu'une petite partie du disque, je sais que je finirai par le recouvrir.
Donc, je n'ai pas besoin de métaxiome « de dépassement » !

Finalement, je peux arriver à : l'angle $\widehat{TMK}$ « contient » 2 feuilles-angulaires-unité,
7 dixièmes de feuilles-angulaires-unité
et 5 centièmes de feuilles-angulaires-unité,

ou, plus simplement : l'écart angulaire de $\widehat{TMK}$ est de 2,75 unités $\mathcal{A}$.

Encore plus simplement $\widehat{TMK}$ mesure 2,75 unités $\mathcal{A}$.

Et même finalement : $\widehat{TMK}$ = 2,75 unités $\mathcal{A}$.

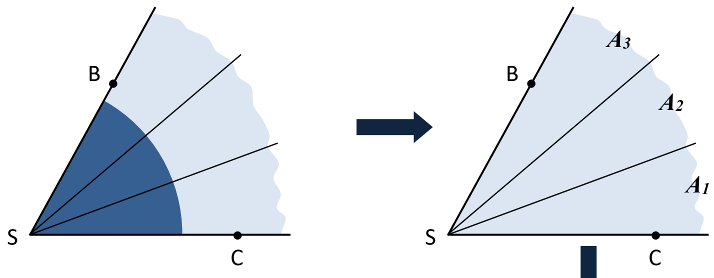
Et oui, tu as bien lu ! Les mathématiciens utilisent la même écriture, $\widehat{TMK}$, pour représenter un angle **ou** sa mesure. Des points ou un nombre ! Ce n'est pas très rigoureux… mais on s'y fait !

Il reste une dernière question : pourquoi des feuilles-angulaires-unité de 2 cm de rayon ?

En réalité, ça n'a aucune importance. Il est juste nécessaire que toutes les feuilles-unité que tu utilises aient le même rayon.

Pourquoi ? Réfléchis... bon, je vais prendre un cas simple, celui d'un angle $\widehat{BSC}$ qui mesurerait exactement trois unités $\mathcal{A}$. Tu as donc besoin de trois feuilles-angulaires-unité côte à côte pour occuper exactement un secteur circulaire de 2 cm de rayon, limité par les deux côtés de $\widehat{BSC}$:

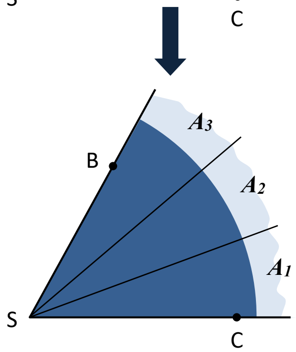
Cela signifie que $\widehat{BSC}$ est l'ensemble des points de trois angles-unité adjacents, A_1, A_2 et A_3.



Mais je peux maintenant choisir d'associer à ces angles-unité des feuilles-angulaires-unité de 3 cm de rayon...
Qui occupent exactement un secteur circulaire de 3 cm de rayon, limité par les deux côtés de $\widehat{BSC}$.

Et $\widehat{BSC}$ continue donc à mesurer exactement trois unités $\mathcal{A}$.

(Ceci pourrait être le début de la démonstration d'un « théorème-physique », mais je vais m'arrêter là !)



Courage, tu arrives au bout de cette interminable escale ! Encore une « définition-physique », un métaxiome... et une définition géométrique ! Tu tiens le coup ?

Oui, M'sieur ! Facile !!!
Alors on continue ☺ !

D_{phy}-17 ***<u>Écart angulaire d'un angle, en unité $\mathcal{A}$</u>*** :

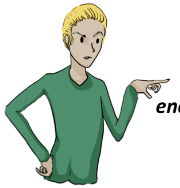
le nombre de feuilles-angulaires-unité d'un angle-unité $\mathcal{A}$
ayant le même sommet que l'angle
et nécessaires pour occuper exactement un secteur circulaire limité par cet angle.

(Ce nombre peut n'être ni entier, ni décimal, ni fractionnaire !)

M-13 Soient A_1 et A_2 deux angles adjacents ; soit A l'angle formé de l'ensemble des points de A_1 et A_2.
Alors, pour toute unité d'écart angulaire :
l'écart angulaire de A est la somme des écarts angulaires de A_1 et de A_2.
Ce métaxiome, bien sûr, correspond à un autre métaxiome, sur les longueurs... qui te paraissait évident !

D-48 ***<u>Bissectrice d'un angle</u>*** : la demi-droite qui sépare cet angle en 2 angles de même écart.
(**D'après M_{phy}-7**, tu sais que c'est possible - avec n = 2.)

Bon, tu es prêt pour une dernière escale ?



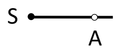
Ah non, M'sieur !
Vous avez dit qu'il y avait
encore un angle particulier à voir !

Ah oui, c'est vrai. D'accord. Mais juste sa définition.
Ne t'inquiète pas, cet angle-là, tu n'as pas fini de le croiser. ☺

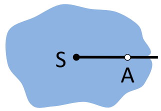
Une excursion-bonus* : *définitions d'angles particuliers.

Puisque tu me demandes de revenir sur les angles particuliers, je vais en profiter pour rédiger quelques définitions :

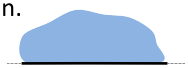
D-49 ***Angle nul*** : une demi-droite
(que tu considères comme 2 fois la même demi-droite).
L'angle nul $\widehat{ASA}$ est la demi-droite [SA).



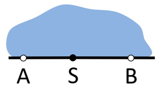
D-50 ***Angle plein*** : un plan.
Un angle plein $\widehat{ASA}$ est un plan qui contient [SA).
(comme il y en a une infinité, l'écriture $\widehat{ASA}$ est ambigüe,
elle ne détermine **pas** un angle :
pour déterminer un angle plein, tu dois choisir un plan, puis une demi-droite de ce plan !)



D-51 ***Demi-plan*** : l'une des 2 parties d'un plan limitées par une droite de ce plan.
(***Ou*** **:** ayant comme seule frontière une droite de ce plan.)



D-52 ***Angle plat*** : un demi-plan.
S étant un point de [AB], différent de A et de B,
un angle plat $\widehat{ASB}$ est l'un des demi-plans limités par (AB).
(Comme il y a une infinité de plans qui contiennent (AB),
il y a également une infinité de demi-plans limités par (AB),
et l'écriture $\widehat{ASB}$ est encore ambigüe :
pour déterminer un angle plat, tu dois choisir un plan,
puis une droite de ce plan… puis l'un des 2 demi-plans qu'elle sépare dans ce plan !)



Ou (comme tu sais maintenant ce qu'est un écart angulaire) :

l'un des angles obtenus en séparant un angle plein en 2 angles de même écart.

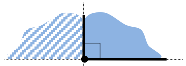
(**D'après M$_{phy}$-7**, tu sais que c'est possible, en choisissant l'angle plein comme première unité d'écart angulaire)

Une toute petite remarque : un même demi-plan correspond à une infinité d'angles plats,
puisque tu peux choisir n'importe quel point de sa droite-frontière
comme sommet d'un angle plat !

Et maintenant - enfin ? - la définition que tu attendais !

D-53 ***<u>Angle droit</u>*** : l'un des angles obtenus en séparant un angle plat en 2 angles de même écart.

(**D'après M_{phy}-7**, tu sais encore que c'est possible,
en choisissant maintenant l'angle plat
comme première unité d'écart angulaire.)

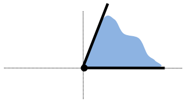


Remarque le petit carré :
C'est un code international pour :
« ceci est un angle droit ». ☺

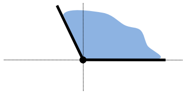
Et, associées à l'angle droit, tu as même droit à 2 définitions de <u>types</u> d'angles :

D-54 ***<u>Angle aigu</u>*** : angle non nul dont l'écart angulaire est inférieur à celui d'un angle droit.

(Quelle que soit l'unité d'écart angulaire choisie :
si tu choisis l'angle droit comme unité, un angle aigu est un angle
dont l'écart angulaire est strictement compris entre 0 et 1.)



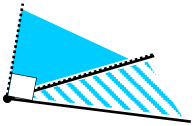
D-55 ***<u>Angle obtus</u>*** : angle dont l'écart angulaire est
supérieur à celui d'un angle droit
<u>et</u> inférieur à celui d'un angle plat.



(Quelle que soit l'unité d'écart angulaire choisie : si tu choisis l'angle droit comme unité,
un angle obtus est un angle dont l'écart angulaire est strictement compris entre 1 et 2.)

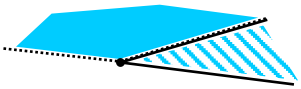
Et pour en finir, 2 définitions de <u>paires particulières</u> d'angles :

D-56 ***<u>Angles complémentaires</u>*** : 2 angles adjacents qui, à eux deux, forment un angle droit



... puis, par abus de langage, 2 angles,
même non adjacents, dont la somme des mesures vaut 90°.

D-57 ***<u>Angles supplémentaires</u>*** : 2 angles adjacents qui, à eux deux, forment un angle plat



... puis, par abus de langage, 2 angles,
même non adjacents, dont la somme des mesures vaut 180°.

Fin de l'excursion... on aborde la dernière escale - elle est courte, ne t'inquiète pas !

Escale-terminus **:** des unités conventionnelles à la mesure d'un secteur ou d'un arc.

Au début de l'escale précédente, j'ai écrit que tu pouvais choisir n'importe quel angle comme unité.
Mais dans la pratique, tu utiliseras certainement l'une des unités choisies par les mathématiciens.
Ces unités découlent de deux approches différentes :

l'approche « angle plein » : l'angle-unité est une subdivision entière de l'angle plein… ce qui suppose un choix humain, arbitraire du nombre de subdivisions : 100, 200, 400, 90, 180, 360…

L'approche « secteur circulaire » dont les caractéristiques sont indépendantes de l'humain... mais dépendantes du disque !

Le degré : c'est l'unité d'écart angulaire la plus utilisée (chez les non-mathématiciens)
C'est également la plus ancienne des unités connues.

Ici, l'angle-unité est construit en séparant l'angle plein en 360 angles de même écart.
Pourquoi 360 ? Parce qu'il y a plus de 5000 ans, les sumériens (Wikipédia ☺) ont conçu un calendrier annuel en repérant les jours de l'année sur un cercle... et leur année comptait 360 jours !

Pourquoi cette unité antique est-elle encore utilisée ? Peut-être parce que 360 est un nombre pratique : il a 24 diviseurs.

Ecriture : 25 degrés s'écrit 25°

Le grade **:** issue d'une volonté, au cours de la révolution française, de bousculer l'ordre établi - et de s'appuyer sur le système décimal - cette unité n'a jamais vraiment réussi à prendre racine.
L'idée était de séparer l'angle plein en 400 angles de même écart. Pourquoi 400 ? Parce que l'un des angles les plus importants de la géométrie, l'angle droit, mesurait alors exactement 100 grades.
Actuellement, seuls quelques cartographes s'en servent encore.

L'idée de s'appuyer sur le système décimal a toutefois partiellement fait son chemin : autrefois, les degrés étaient eux-mêmes séparés en soixantièmes, puis en soixantièmes de soixantièmes, ce qui ne simplifie pas les choses ! Maintenant, on leur applique le système décimal : dixièmes de degré, centièmes de degré...

Ecriture : il y en a plusieurs… donc trop !

Le radian : c'est l'unité utilisée par les mathématiciens. Au lieu de chercher à se mettre d'accord sur le nombre par lequel ils allaient subdiviser l'angle plein, ils ont préféré chercher, dans la géométrie elle-même, une unité indépendante de leur culture.
Ils ont choisi comme feuille-angulaire-unité une feuille-angulaire limitée par trois lignes (deux segments et un arc de cercle) de même longueur.

Ecriture : 1,2 radians s'écrit 1,2 rad

D-58 ***<u>Degré, grade, radian</u>*** **:** unités d'écart angulaire.

360 angles coplanaires d'un degré, adjacents deux à deux, forment un plan.

400 angles coplanaires d'un grade, adjacents deux à deux, forment un plan.

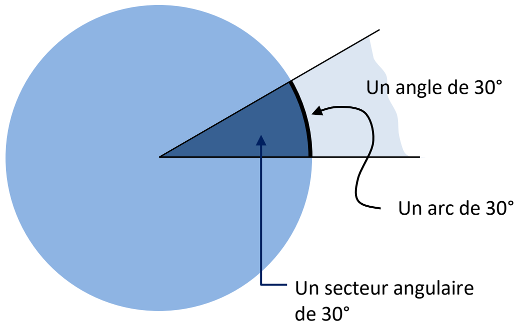
2π angles coplanaires d'un radian, adjacents deux à deux, forment un plan.
(Oui, mais 2π, c'est un nombre ? … à suivre, quand nous en serons au cercle. ☺)

Et pour finir, une extension de la mesure d'un angle : **mesure d'un secteur circulaire**, **mesure d'un arc**.
La façon dont le radian a été conçu me permet d'introduire une dernière remarque :

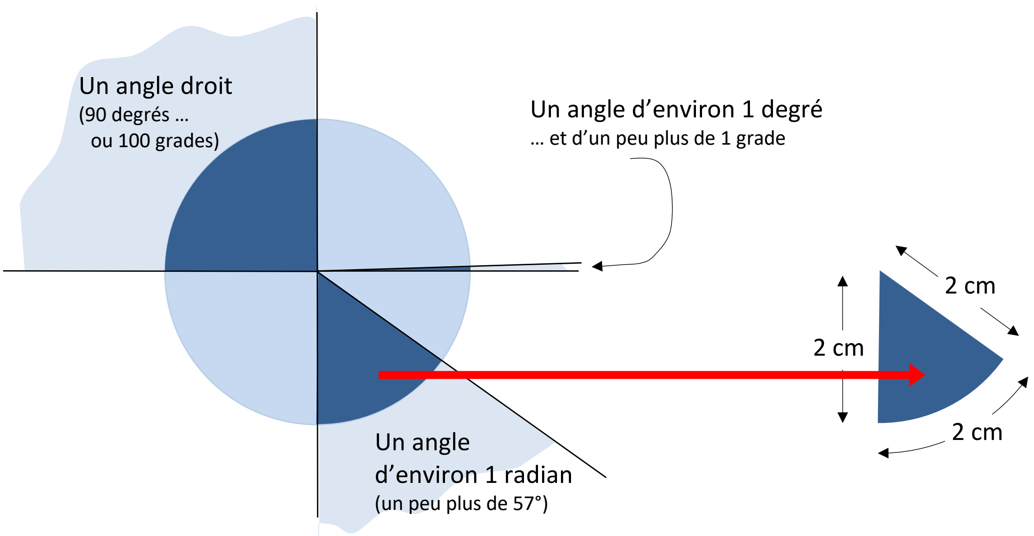
tu entendras certainement souvent parler de la mesure d'un arc de cercle, ou encore de la mesure d'un secteur circulaire : par exemple, un arc de cercle de 30°.

En réalité, bien sûr, ce qui mesure 30°,
c'est un angle dont le sommet
est le centre de l'arc de cercle
et dont les côtés passent par les extrémités de cet arc.

Un secteur circulaire de 30° est, quant à lui,
un secteur limité par les côtés d'un angle de 30° !



Que penserais-tu de résumer tout ça par un dessin ?



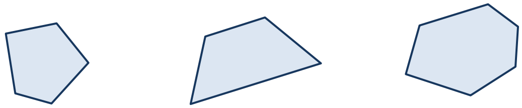
Deuxième croisière : à l'abordage des triangles isométriques.

Tu dois commencer à fatiguer, non ? Mais cette dernière croisière n'est vraiment pas longue.

***Escale unique* :** les triangles.

Encore une escale qui commence par des définitions :

D-59 ***Polygone convexe* :** surface plane limitée et convexe, dont la frontière est formée de segments.



Pourquoi ai-je précisé « convexe » ? Tu verras plus tard (partie trois de ce livre) qu'il existe d'autres sortes de polygones... dont tu n'as pas à te préoccuper pour l'instant !

Pourquoi dois-je préciser « limitée » ? Parce que la frontière d'un polygone convexe sépare son plan en deux parties. Seule la partie limitée est un « polygone convexe », l'autre partie - le reste du plan - n'a pas de nom !

À ce propos, deux remarques :

d'abord, ne confonds pas « limité » et « limité par... » :

Un ensemble de points est limité lorsqu'il existe une boule qui le contient entièrement. Le rayon de cette boule peut-être très grand, mais pas « infiniment grand » - c'est-à-dire qu'il existe des nombres entiers plus grands que lui.

Une surface est « limitée par... » lorsqu'elle a une frontière. Mais lorsque cette frontière est illimitée, la surface peut l'être également :
un demi-plan est limité par une droite, mais ce n'est pas une surface limitée !

Ensuite, maintenant que tu connais la notion de « frontière », je peux compléter la définition D-36 d'un disque :

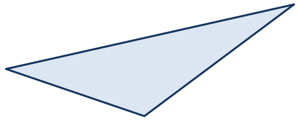
D-36 (fin) ***disque*** : surface plane limitée, dont la frontière est un cercle.

Bon, c'est un peu comme pour le polygone convexe, non ?

Bien sûr. Pourquoi crois-tu que je t'écris cette définition maintenant ?
Mais si tu ne veux pas que je m'énerve,
ne me dis jamais qu'un disque est un polygone - convexe ou non.
Ça voudrait dire qu'un cercle est formé de segments !

Promis, M'sieur, je ferai attention... enfin... j'essaierai ! ☺☺

On continue ? Encore quatre toutes petites définitions :

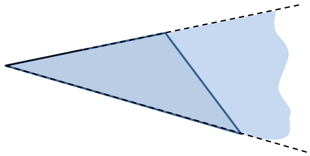


D-60 ***<u>Triangle</u>*** **:** polygone convexe
dont la frontière est formée de trois segments.

D-61 ***<u>Côté d'un triangle</u>*** **:** chacun des segments de sa frontière. (Ou parfois, sa longueur !)

D-62 ***<u>Sommet d'un triangle</u>*** **:** chacune des extrémités de ses côtés.

D-63 ***<u>Angle d'un triangle</u>*** **:** angle qui contient le triangle
et dont les côtés
contiennent deux côtés du triangle.



Bien entendu, tu avais deviné qu'un triangle a autant d'angles et de sommets que de côtés.

Bien entendu, monsieur ! Et là, c'est vrai !

Mais je te crois, je te crois...

Et maintenant, une question tout à fait fondamentale :

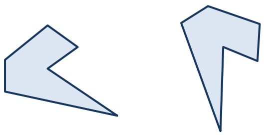
de combien d'informations as-tu besoin pour pouvoir affirmer que deux triangles sont isométriques ?

Eh, oh, monsieur ! Stop ! Vous allez trop vite, là !
Ça veut dire quoi, « isométriques » ?

Oh pardon, je me suis encore laissé emporter...
Tu as raison, j'ai sauté une étape.
Allez, une nouvelle définition !

Pour débuter, une définition provisoire (mais la définition définitive vient juste après) :

D-64 *<u>Figures isométriques</u>* : étymologiquement - en grec,
deux figures qui « ont les mêmes mesures » :



à chaque angle de la première figure
correspond un angle de la seconde, de même écart angulaire

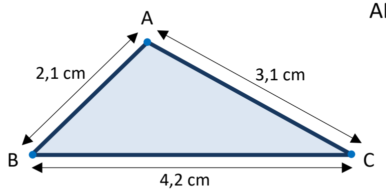
à chaque segment de la première figure
correspond un segment de la seconde, de même longueur.

Une figure est un ensemble de points. Mais si tu pouvais matérialiser deux figures isométriques - c'est-à-dire créer deux objets qui occuperaient exactement les points de ces deux figures, ces deux objets seraient interchangeables et indiscernables : chacun d'entre eux pourrait occuper exactement les points auparavant occupés par l'autre... et au bout de quelques manipulations, tu ne saurais plus qui est qui !

À chaque segment... que tu l'aies mis en évidence ou non : tu peux toujours décider de relier deux points d'une figure par un segment - et comme la longueur d'un segment correspond à la distance entre ses deux extrémités, il ne te manque plus qu'un métaxiome qui relie angles et longueurs pour créer une définition plus simple des figures isométriques.

Et ce métaxiome, le voici :

M-14 Si deux triangles ABC et DEF sont tels que AB = DE, AC = DF et BC = EF,
alors $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.
(Naturellement, il s'agit ici des écarts angulaires, pas des angles !!!)



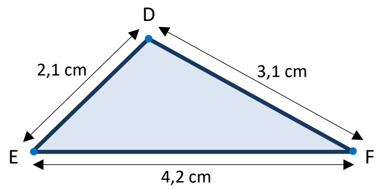
AB = DE <u>et</u> AC = DF <u>et</u> BC = EF

donc

$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$



Et maintenant, tu peux remplacer la définition provisoire par :

D-64 ***<u>Figures isométriques</u>*** : deux figures telles que :

à chaque paire de points de la première figure correspond
une paire de points de la seconde, séparés par la même distance.

(Alors, à chaque angle de la première figure
correspond un angle de la seconde, de même écart angulaire
et à chaque segment de la première figure
correspond un segment de la seconde, de même longueur.)

Bon, et si maintenant, on en revenait à ma question tout à fait fondamentale :

de combien d'informations as-tu besoin
pour pouvoir affirmer que
deux triangles sont isométriques ?

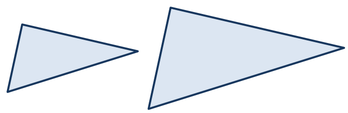
D'accord, M'sieur, d'accord... vous énervez pas !

Qui s'énerve ?
☺☺☺

Savoir que deux triangles sont isométriques t'apporte six informations : trois égalités de longueurs, trois égalités d'écarts angulaires. Mais as-tu besoin de ces six informations pour avoir la certitude que deux triangles sont isométriques ?

La réponse est évidemment non, puisque **d'après M-14**, trois égalités de longueurs suffisent à assurer l'isométrie de deux triangles. Donc trois informations peuvent suffire... à condition de bien les choisir : trois égalités d'écarts angulaires ne suffisent pas !

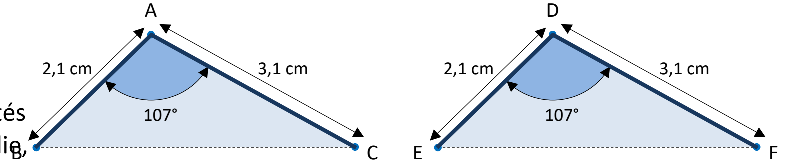
Mêmes écarts angulaires, mais longueurs différentes :



Alors, quelles autres trios d'informations ?
Voici un nouveau métaxiome pour y répondre. C'est l'avant-dernier !

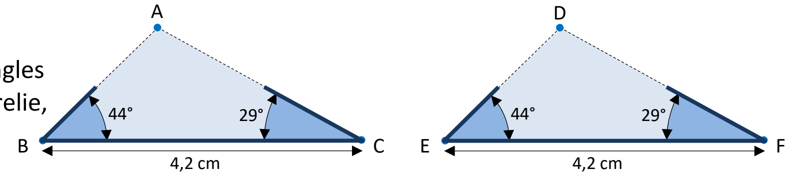
M-15 Deux triangles étant donnés,

Si un angle
et les deux côtés
qu'il relie,



ou

un côté
et les deux angles
qu'il relie,



ont les mêmes mesures dans les deux triangles, alors ces deux triangles sont isométriques.

« Relier » n'est pas vraiment un mot mathématique, mais je l'utilise quand même parce qu'il me paraît clair :
un angle relie deux côtés lorsque ces deux côtés ont comme extrémité le sommet de l'angle,
et un côté relie deux angles lorsque ces deux angles ont comme sommets les extrémités de ce côté. ☺

Cette escale touche à sa fin. Encore un tout petit métaxiome, le dernier - tu vas certainement le trouver « évident » :

M-16 Si une droite située dans le plan d'un triangle coupe l'un des côtés de ce triangle,
elle en coupe également un 2ème côté.

Je t'avais dit qu'il te paraîtrait évident !

Voilà, c'est la fin de ton septième et dernier voyage d'initiation. Repose-toi un peu et... à bientôt.
Tu vas enfin commencer à « faire » de la géométrie !